

Programme de Colle 11

Semaine 51 – du 18 au 22 décembre 2023

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative) **ou** une primitive usuelle, sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de *l'ensemble* du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 2 : Fonctions réelles (Tout le chapitre)

Chapitre 3 : Équations différentielles (Tout le chapitre)

Chapitre 4 : Les suites numériques

1. Introduction sur les suites
 - 1.1. Définition et vocabulaire sur les suites
 - 1.2. Suite définie explicitement, définie par récurrence
 - 1.3. Suites arithmétiques
 - 1.4. Suites géométriques
 - 1.5. Suites arithmético-géométrique
2. Limite d'une suite
 - 2.1. Topologie
 - 2.2. Limite d'une suite
 - 2.3. Convergence et divergence d'une suite
3. Manipulation des limites
 - 3.1. Opérations sur les limites
 - 3.2. Composition à gauche par une fonction
 - 3.3. Passage à la limite dans les inégalités
 - 3.4. Suite extraite
4. Théorèmes d'existence des limites
 - 4.1. Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration
 - 4.2. Théorème de la limite monotone
 - 4.3. Théorème des suites adjacentes
5. Étude de suites définies par récurrence
 - 5.1. Suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants
 - 5.2. Suites récurrentes, cas général
6. Caractérisation séquentielle
 - 6.1. Caractérisation séquentielle de la densité
 - 6.2. Caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures

Suites : Opérations sur les limites

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur** !

Questions de cours :

Q1. Énoncé et démonstration « *La formule d'intégration par parties* ».

**Théorème** *La formule d'intégration par parties*

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs dérivées u' et v' sont continues sur I , alors, pour tout $(a, b) \in I^2$:

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

Q2. Énoncé et démonstration « *Dérivée des fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$* ».

**Théorème** *Dérivée des fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$*

Soient I un intervalle, $u : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable, alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

Q3. Énoncé et démonstration « *Problème de Cauchy pour $y' + a(x)y = b(x)$* ».

**Théorème** *Problème de Cauchy pour $y' + a(x)y = b(x)$*

Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, A une primitive de a sur I , $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (y(x_0) = y_0 \text{ est appelée condition initiale})$$

Q4. Énoncé et démonstration « *Convergence et caractère bornée* ».

**Théorème** *Convergence et caractère bornée*

Toute suite convergente est bornée.

Q5. Démonstration du théorème suivant

**Théorème**

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limites respectives $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$.

Alors $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell + \ell'$.

Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 6 : Nombres complexes partie 2

Tout le chapitre est au programme

Chapitre 7 : Structures algébriques

1 Loi de composition interne

1.1 Définitions

1.2 Distributivité d'une loi sur une autre

1.3 Parties stables par une loi

2 Groupes et sous-groupes

Questions de cours page suivante

Questions de cours

Q1 : Énoncé de

Propriété 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

Il existe n racines n -ièmes complexes de 1, ce sont les nombres de la forme $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

On note \mathbb{U}_n l'ensemble des racines n -ième de l'unité. $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$.

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \left(e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^k, k \in [0, n-1] \right\} = \{w_1^k, k \in [0, n-1]\}.$$

Q2 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 1

La somme des racines n -ièmes de 1 est égale à 0, et les racines n -ièmes de 1 différentes de 1 sont les solutions de l'équation $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$.

Q3 : Énoncé de la définition de l'élément neutre et du symétrique d'un élément. Démonstration de l'unicité du neutre.

Définition 1

Soit $(E, *)$ et e un élément de E .

On dit que e est un **élément neutre** pour la loi $*$ si :

pour tout x de E , on a : $x * e = e * x = x$.

Propriété 2

Unicité de l'élément neutre : L'élément neutre de $(E, *)$ si il existe est unique.

Définition 2

et *Propriété* Soit E un ensemble muni d'une loi interne $*$, associative et admettant un élément neutre e .

On dit qu'un élément x de E est **inversible** pour $*$ si il existe x' dans E tel que $x * x' = x' * x = e$.

Si un tel élément x' existe, il est unique, on l'appelle l'**inverse** (ou le **symétrique**) de x pour la loi $*$ et on le note le plus souvent x^{-1} .

Puissances négatives : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si x est inversibles alors x^n l'est aussi et :
 $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$. On note x^{-n} .

Notation additive : l'inverse de x est noté $-x$, on parle d'**opposé**. $x * (-x) = 0_E$.

Q4 : Énoncé de la définition d'un groupe

Définition 3

Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $*$.

On dit que $(G, *)$ est un **groupe** lorsque :

- $*$ est associative ;
- $*$ admet un élément neutre $e \in G$;
- tout élément $x \in G$ admet un inverse (ou symétrique) pour $*$ dans G .

Si de plus, $*$ est commutative, on dira que $(G, *)$ est un groupe commutatif ou abélien.