Année 2023-2024
Promo 31 – 1ère Année

Programme de Colle 13
Semaine 3 – du 15 au 19 janvier 2024

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative) **ou** une primitive usuelle, sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de ***l'ensemble*** du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 2 : Fonctions réelles (Tout le chapitre)

Chapitre 3 : Équations différentielles (Tout le chapitre)

Chapitre 4 : Les suites numériques

1. Introduction sur les suites
   - 1.1. Définition et vocabulaire sur les suites
   - 1.2. Suite définie explicitement, définie par récurrence
   - 1.3. Suites arithmétiques
   - 1.4. Suites géométriques
   - 1.5. Suites arithmético-géométrique
2. Limite d'une suite
   - 2.1. Topologie
   - 2.2. Limite d'une suite
   - 2.3. Convergence et divergence d'une suite
3. Manipulation des limites
   - 3.1. Opérations sur les limites
   - 3.2. Composition à gauche par une fonction
   - 3.3. Passage à la limite dans les inégalités
   - 3.4. Suite extraite
4. Théorèmes d'existence des limites
   - 4.1. Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration
   - 4.2. Théorème de la limite monotone
   - 4.3. Théorème des suites adjacentes
5. Étude de suites définies par récurrence
   - 5.1. Suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants
   - 5.2. Suites récurrentes, cas général
6. Caractérisation séquentielle
   - 6.1. Caractérisation séquentielle de la densité
   - 6.2. Caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures

Suites : Opérations sur les limites

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur !**

Questions de cours :

Q1. Énoncé et démonstration « *La formule d'intégration par parties* ».

Théorème *La formule d'intégration par parties*

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs dérivées u' et v' sont continues sur I, alors, pour tout $\left(a, b\right) \in I^2$:

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Q2. Énoncé et démonstration « *Dérivée des fonctions de la forme* $x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ ».

Théorème *Dérivée des fonctions de la forme* $x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$

Soient I un intervalle, $u : I \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction dérivable, alors la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$$

Q3. Énoncé et démonstration « *Problème de Cauchy pour* $y' + a(x)y = b(x)$ ».

Théorème *Problème de Cauchy pour* $y' + a(x)y = b(x)$

Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, A une primitive de a sur I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (y(x_0) = y_0 \text{ est appelée } \textit{condition initiale})$$

Q4. Énoncé et démonstration « *Convergence et caractère bornée* ».

Théorème *Convergence et caractère bornée*

Toute suite convergente est bornée.

Q5. Démonstration du théorème suivant

Théorème

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limites respectives $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$.

Alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$.

Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 6 : Nombres complexes partie 2

Tout le chapitre est au programme

Chapitre 7 : Structures algébriques

Tout le chapitre est au programme

1 Loi de composition interne

1.1 Définitions

1.2 Distributivité d'une loi sur une autre

1.3 Parties stables par une loi

2 Groupes et sous-groupes

3 Morphismes de groupes

3.1 Définitions et propriétés

3.2 Noyau et image

Questions de cours page suivante

Questions de cours

Q1 : Énoncé de

Propriété 1
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$.

Il existe n racines n-ièmes complexes de 1, ce sont les nombres de la forme $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in \{0, 1, .., n-1\}$.
On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ième de l'unité. $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$.
$\mathbb{U}_n = \left\{ \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k, k \in [|0, n-1|] \right\} = \{w_1^k,\ k \in [|0, n-1|]\}$.

Q2 : Énoncé de la définition d'un groupe

Définition 1
Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $*$.
On dit que $(G, *)$ est un **groupe** lorsque :

- $*$ est associative ;
- $*$ admet un élément neutre $e \in G$;
- tout élément $x \in G$ admet un inverse (ou symétrique) pour $*$ dans G.

Si de plus, $*$ est commutative, on dira que $(G, *)$ est un groupe commutatif ou abélien.

Q3 : Énoncé de :

Propriété 1
Caractérisation des sous-groupes : Soit $(G, *)$ un groupe et $H \subset G$.
$(H, *)$ sous-groupe de $(G, *)$ si et seulement si :

- $1_G \in H$
- $\forall x \in H, \quad x^{-1} \in H$
- $\forall (x, y) \in H^2, \quad x * y \in H$.

OU

- $1_G \in H$
- $\forall (x, y) \in H^2, \quad x * y^{-1} \in H$

Q4 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 2
Soient $(G, *)$ et $(H, \boxtimes)$ deux groupes de neutres respectifs e_G et e_H.
Si $f : G \mapsto H$ est un morphisme de groupe, alors

1. $f(e_G) = e_H$.
2. $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

Q5 : Définition de l'**image et du noyau d'un morphisme de groupe** :
Soit f un morphisme de $(G_1, *)$ de neutre e_1 dans $(G_2, \triangle)$ de neutre e_2.

$f(G_1)$ est appelé l'image du morphisme f noté Imf.
$Imf = \{y \in G_2, \exists x \in G_1, f(x) = y\}$

$f^{-1}(\{e_2\})$ est appelé le noyau du morphisme f, noté $\ker f$.
$\ker f = \{x \in G_1, f(x) = e_2\}$