Année 2023-2024
Promo 31 – 1$^{\text{ère}}$ Année

Programme de Colle 14
Semaine 4 – du 22 au 26 janvier 2024

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative)
  ou une primitive usuelle **ou** un équivalent usuel en 0 ainsi que son écriture équivalente avec o, sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de ***l'ensemble*** du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 3 : Équations différentielles (Tout le chapitre)

Chapitre 4 : Les suites numériques (Tout le chapitre)

Chapitre 5 : Limites et comparaison des fonctions

1. Définitions de la limite d'une fonction
   1.1. Limite d'une fonction en un point
   1.2. Limite d'une fonction à droite, à gauche en un point
2. Manipulation des limites de fonctions
   2.1. Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction
   2.2. Opérations sur les limites
   2.3. Passage à la limite dans les inégalités
3. Théorèmes d'existence des limites
   3.1. Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration
   3.2. Théorème de la limite monotone
4. Négligeabilité, domination
   4.1. Définitions
   4.2. Opérations relatives à la négligeabilité et à la domination
5. Équivalence
   5.1. Définition
   5.2. Opérations sur les équivalents
   5.3 Équivalents usuels en 0

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur !**

Liste des équivalents usuels en 0 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

- **Logarithme, exponentielle, puissances :**

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \iff e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \iff (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques circulaires :**

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \iff \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$
$$\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \tan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques circulaires inverses :**

$$\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \operatorname{Arcsin}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \operatorname{Arctan}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques hyperboliques :**

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \operatorname{sh}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \iff \operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$
$$\operatorname{th}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \operatorname{th}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

Questions de cours :

Q1. Énoncé et démonstration « *Convergence et caractère bornée* ».

Théorème *Convergence et caractère bornée*

Toute suite convergente est bornée.

Q2. Démonstration du théorème suivant

Théorème

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limites respectives $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$.

Alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$.

Q3. Énoncé et démonstration « *Caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures* ».

Théorème *Caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures*

Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

(i) $b = \sup \mathcal{A}$ si et seulement si b est un majorant de $\mathcal{A}$ et est la limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

(ii) $b = \inf \mathcal{A}$ si et seulement si b est un minorant de $\mathcal{A}$ et est la limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

Q4. Énoncé et démonstration « *Unicité de la limite* ».

Théorème *Unicité de la limite*

Soient X une partie de $\mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

(i) Si f possède une limite en a, celle-ci est unique, notée $\lim\limits_{a} f$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, la relation $\lim\limits_{a} f = \ell$ se note souvent $f \underset{a}{\to} \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

(ii) Si $a \in X$ et si f possède une limite en a, alors : $\lim\limits_{a} f = f(a)$.

Q5. Énoncé « *Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration* » et démonstration du théorème des gendarmes

Théorème *Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration*

Soient X une partie de $\mathbb{R}$, $f, m, M : X \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) Théorème des gendarmes/d'encadrement :

Si $\lim\limits_{a} m = \lim\limits_{a} M = \ell$ et si $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_{a} f$ **existe** et vaut ℓ.

(ii) Théorème de minoration :

Si $\lim\limits_{a} m = +\infty$ et si $f(x) \geqslant m(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_{a} f$ **existe** et vaut $+\infty$.

(iii) Théorème de majoration :

Si $\lim\limits_{a} M = -\infty$ et si $f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_{a} f$ **existe** et vaut $-\infty$.

Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 6 : Structures algébriques

Tout le chapitre est au programme.

Chapitre 7 : Polynômes

1 L'espace des polynômes

1.1 Définition

1.2 Opérations

1.3 Notation définitive des polynômes

1.4 Degré

1.5 Structure d'anneau

La définition d'un anneau n'est pas au programme.

1.6 Composition

1.7 Fonction associée

2 Division euclidienne

3 Racines d'un polynôme

3.1 Multiplicité d'une racine

3.2 Nombre maximal de racines

3.3 Polynômes scindés

4 Relations coefficients racines

4.1 Polynômes de degré 2

4.2 Polynômes de degré quelconque

Produit et somme des racines uniquement. Les autres relations ne sont pas au programme.

Questions de cours page suivante.

Questions de cours

Q1 : Énoncé de :

Propriété 1
Caractérisation des sous-groupes : Soit $(G, *)$ un groupe et $H \subset G$.
$(H, *)$ sous-groupe de $(G, *)$ si et seulement si :

- $1_G \in H$
- $\forall x \in H, \quad x^{-1} \in H$
- $\forall (x, y) \in H^2, \quad x * y \in H$.

OU

- $1_G \in H$
- $\forall (x, y) \in H^2, \quad x * y^{-1} \in H$

Q2 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 2
Soient $(G, *)$ et $(H, \boxtimes)$ deux groupes de neutres respectifs e_G et e_H.
Si $f : G \mapsto H$ est un morphisme de groupe, alors

1. $f(e_G) = e_H$.
2. $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

Q3 : Définition de l'**image et du noyau d'un morphisme de groupe** :
Soit f un morphisme de $(G_1, *)$ de neutre e_1 dans $(G_2, \triangle)$ de neutre e_2.

$f(G_1)$ est appelé l'image du morphisme f noté Imf.
$Imf = \{y \in G_2, \exists x \in G_1, f(x) = y\}$

$f^{-1}(\{e_2\})$ est appelé le noyau du morphisme f, noté $\ker f$.
$\ker f = \{x \in G_1, f(x) = e_2\}$

Q4 : **Division euclidienne dans** $\mathbb{K}[X]$ **:** Énoncé et démonstration de l'unicité

Propriété 3
Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et B un élément non nul de $\mathbb{K}[X]$.
Il existe un **unique** couple (Q, R) de $\mathbb{K}[X]^2$ tel que $\boxed{A = BQ + R \quad \text{et} \quad deg(R) < deg(B).}$
Q est le quotient et R est le reste de la division euclidienne par B.
Si $R = 0$, B est un diviseur de A.

Q5 : Énoncé de la propriété « caractérisation de la multiplicité d'une racine » :

Propriété 4
Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- α est racine de multiplicité m de P
- $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.
- $P(\alpha) = 0$ et α est une racine de multiplicité $m - 1$ de P'.

Q6 : Énoncé de la propriété « Nombre maximal de racines »

Propriété 5
Un polynôme non nul possède au plus $\deg(P)$ racines comptées avec multiplicité.
En particulier, seul le polynôme nul admet une infinité de racines.