

Programme de Colle 15 Semaine 6 – du 5 au 9 février 2024

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative) **ou** une primitive usuelle **ou** un équivalent usuel en 0 ainsi que son écriture équivalente avec o , sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de *l'ensemble* du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 3 : Équations différentielles (Tout le chapitre)

Chapitre 4 : Les suites numériques (Tout le chapitre)

Chapitre 5 : Limites et comparaison des fonctions

1. Définitions de la limite d'une fonction
 - 1.1. Limite d'une fonction en un point
 - 1.2. Limite d'une fonction à droite, à gauche en un point
2. Manipulation des limites de fonctions
 - 2.1. Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction
 - 2.2. Opérations sur les limites
 - 2.3. Passage à la limite dans les inégalités
3. Théorèmes d'existence des limites
 - 3.1. Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration
 - 3.2. Théorème de la limite monotone
4. Négligeabilité, domination
 - 4.1. Définitions
 - 4.2. Opérations relatives à la négligeabilité et à la domination
5. Équivalence
 - 5.1. Définition
 - 5.2. Opérations sur les équivalents
 - 5.3. Équivalents usuels en 0

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur** !

Liste des équivalents usuels en 0 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

- **Logarithme, exponentielle, puissances :**

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \iff \ln(1+x) = x + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x)$$

$$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \iff e^x = 1 + x + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x)$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x \iff (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques circulaires :**

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \iff \sin(x) = x + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x)$$

$$\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \iff \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^2)$$

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \iff \tan(x) = x + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques circulaires inverses :**

$$\text{Arcsin}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \iff \text{Arcsin}(x) = x + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x)$$

$$\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \iff \text{Arctan}(x) = x + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques hyperboliques :**

$$\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \iff \text{sh}(x) = x + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x)$$

$$\text{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \iff \text{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^2)$$

$$\text{th}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \iff \text{th}(x) = x + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x)$$

Questions de cours :

Q1. Énoncé et démonstration « *Convergence et caractère bornée* ».



Théorème *Convergence et caractère bornée*

Toute suite convergente est bornée.

Q2. Démonstration du théorème suivant



Théorème

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limites respectives $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$.

Alors $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell + \ell'$.

Q3. Énoncé et démonstration « *Caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures* ».



Théorème *Caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures*

Soient \mathcal{A} une partie de \mathbb{R} et $b \in \mathbb{R}$.

(i) $b = \sup \mathcal{A}$ si et seulement si b est un majorant de \mathcal{A} et est la limite d'une suite d'éléments de \mathcal{A} .

(ii) $b = \inf \mathcal{A}$ si et seulement si b est un minorant de \mathcal{A} et est la limite d'une suite d'éléments de \mathcal{A} .

Q4. Énoncé et démonstration « *Unicité de la limite* ».**Théorème** *Unicité de la limite*

Soient X une partie de \mathbb{R} , $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

(i) Si f possède une limite en a , celle-ci est unique, notée $\lim_a f$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, la relation $\lim_a f = \ell$ se note souvent $f \xrightarrow{a} \ell$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

(ii) Si $a \in X$ et si f possède une limite en a , alors : $\lim_a f = f(a)$.

Q5. Énoncé « *Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration* » et démonstration du théorème des gendarmes**Théorème** *Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration*

Soient X une partie de \mathbb{R} , $f, m, M : X \rightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) **Théorème des gendarmes/d'encadrement :**

Si $\lim_a m = \lim_a M = \ell$ et si $m(x) \leq f(x) \leq M(x)$ au voisinage de a , alors $\lim_a f$ **existe** et vaut ℓ .

(ii) **Théorème de minoration :**

Si $\lim_a m = +\infty$ et si $f(x) \geq m(x)$ au voisinage de a , alors $\lim_a f$ **existe** et vaut $+\infty$.

(iii) **Théorème de majoration :**

Si $\lim_a M = -\infty$ et si $f(x) \leq M(x)$ au voisinage de a , alors $\lim_a f$ **existe** et vaut $-\infty$.

Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 6 : Structures algébriques

Tout le chapitre est au programme.

Chapitre 7 : Polynômes

1 L'espace des polynômes

1.1 Définition

1.2 Opérations

1.3 Notation définitive des polynômes

1.4 Degré

1.5 Structure d'anneau

La définition d'un anneau n'est pas au programme.

1.6 Composition

1.7 Fonction associée

2 Division euclidienne

3 Racines d'un polynôme

3.1 Multiplicité d'une racine

3.2 Nombre maximal de racines

3.3 Polynômes scindés

4 Relations coefficients racines

4.1 Polynômes de degré 2

4.2 Polynômes de degré quelconque

Produit et somme des racines uniquement. Les autres relations ne sont pas au programme.

Questions de cours page suivante.

Questions de cours

Q1 : Énoncé de :

Propriété 1

Caractérisation des sous-groupes : Soit $(G, *)$ un groupe et $H \subset G$.

$(H, *)$ sous-groupe de $(G, *)$ si et seulement si :

- $1_G \in H$
- $\forall x \in H, \quad x^{-1} \in H$
- $\forall (x, y) \in H^2, \quad x * y \in H$.

OU

- $1_G \in H$
- $\forall (x, y) \in H^2, \quad x * y^{-1} \in H$

Q2 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 2

Soient $(G, *)$ et (H, \boxtimes) deux groupes de neutres respectifs e_G et e_H .

Si $f : G \mapsto H$ est un morphisme de groupe, alors

1. $f(e_G) = e_H$.
2. $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

Q3 : Définition de l'**image et du noyau d'un morphisme de groupe** :

Soit f un morphisme de $(G_1, *)$ de neutre e_1 dans (G_2, Δ) de neutre e_2 .

$f(G_1)$ est appelé l'image du morphisme f noté Imf .

$$Imf = \{y \in G_2, \exists x \in G_1, f(x) = y\}$$

$f^{-1}(\{e_2\})$ est appelé le noyau du morphisme f , noté $\ker f$.

$$\ker f = \{x \in G_1, f(x) = e_2\}$$

Q4 : **Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$** : Énoncé et démonstration de l'unicité

Propriété 3

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et B un élément non nul de $\mathbb{K}[X]$.

Il existe un **unique** couple (Q, R) de $\mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.

Q est le quotient et R est le reste de la division euclidienne par B .

Si $R = 0$, B est un diviseur de A .

Q5 : Énoncé de la propriété « caractérisation de la multiplicité d'une racine » :

Propriété 4

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- α est racine de multiplicité m de P
- $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.
- $P(\alpha) = 0$ et α est une racine de multiplicité $m - 1$ de P' .

Q6 : Énoncé de la propriété « Nombre maximal de racines »

Propriété 5

Un polynôme non nul possède au plus $\deg(P)$ racines comptées avec multiplicité.

En particulier, seul le polynôme nul admet une infinité de racines.