Année 2023-2024
Promo 31 – $1^{\text{ère}}$ Année

Programme de Colle 17
Semaine 8 – du 19 au 23 février 2024

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative)
  ou une primitive usuelle **ou** un équivalent usuel en 0 ainsi que son écriture équivalente avec o, sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de ***l'ensemble*** du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 4 : Les suites numériques (Tout le chapitre)

Chapitre 5 : Limites et comparaison des fonctions (Tout le chapitre)

Chapitre 6 : Continuité

1. Définitions et premières propriétés
   - 1.1. Définitions
   - 1.2. Discontinuité de 1ère et de 2nde espèce, continuité par morceaux
   - 1.3. Prolongement par continuité en un point
   - 1.4. Caractérisation séquentielle de la continuité
   - 1.5. Opérations sur la continuité
2. Les grands théorèmes
   - 2.1. Théorème des valeurs intermédiaires
   - 2.2. Théorème des bornes atteintes
   - 2.3. Continuité d'une fonction réciproque

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur !**

Liste des équivalents usuels en 0 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

- **Logarithme, exponentielle, puissances :**

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \iff e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \iff (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques circulaires :**

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \iff \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$
$$\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \tan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques circulaires inverses :**

$$\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \operatorname{Arcsin}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \operatorname{Arctan}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques hyperboliques :**

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \operatorname{sh}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \iff \operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$
$$\operatorname{th}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \operatorname{th}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

Questions de cours :

Q1. Démonstration du théorème suivant

Théorème

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limites respectives $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$.

Alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$.

Q2. Énoncé et démonstration « *Caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures* ».

Théorème *Caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures*

Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

(i) $b = \sup \mathcal{A}$ si et seulement si b est un majorant de $\mathcal{A}$ et est la limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

(ii) $b = \inf \mathcal{A}$ si et seulement si b est un minorant de $\mathcal{A}$ et est la limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

Q3. Énoncé « *Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration* » et démonstration du théorème des gendarmes

Théorème *Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration*

Soient X une partie de $\mathbb{R}$, $f, m, M : X \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) Théorème des gendarmes/d'encadrements :

Si $\lim\limits_a m = \lim\limits_a M = \ell$ et si $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f$ **existe** et vaut ℓ.

(ii) Théorème de minoration :

Si $\lim\limits_a m = +\infty$ et si $f(x) \geqslant m(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f$ **existe** et vaut $+\infty$.

(iii) Théorème de majoration :

Si $\lim\limits_a M = -\infty$ et si $f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f$ **existe** et vaut $-\infty$.

Q4. Énoncé et démonstration du « *Théorème des valeurs intermédiaires ou TVI* »

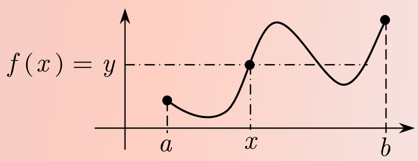
Théorème *Théorème des valeurs intermédiaires ou TVI*

Soient I un **intervalle,** $a, b \in I$.

Si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, alors toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ possède **au moins** un antécédent par f entre a et b.

i.e. (en supposant en plus que $f(a) < f(b)$) :

$$\forall y \in \big[f(a), f(b)\big], \quad \exists x \in I, \quad f(x) = y$$



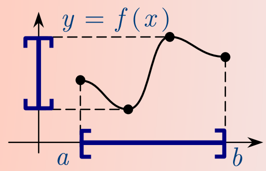
Q5. Énoncé et démonstration « *Théorème des bornes atteintes* »

Théorème *Théorème des bornes atteintes*

✓ Toute fonction continue sur un segment, est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit :

✓ L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.



Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 9 : Espaces vectoriels

Tout le chapitre est au programme.

1 Structure d'espace vectoriel

1.1 Définition

1.2 Exemples fondamentaux

1.3 Premières propriétés

1.4 Combinaisons linéaires

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition et exemple

2.2 Intersections de sous-espaces vectoriels

2.3 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

2.4 Somme de sous-espaces vectoriels

2.5 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

3 Familles génératrices, libres, bases

3.1 Famille génératrice

3.2 Famille libre

3.3 Bases

Chapitre 10 : Espaces vectoriels de dimensions finies

Tout le chapitre est au programme

1 Définition

2 Bases

3 Sous espaces vectoriels de dimensions finies

4 Produit cartésien

5 Rang d'une famille de vecteurs

Questions de cours page suivante.

Questions de cours

Q1 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 1
Soit E un ev et F et G sont deux sev de E.
Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont en somme directe.
2. $\forall (f, g) \in F \times G,\ f + g = 0_E \Rightarrow f = g = 0_E$.
3. $F \cap G = \{0_E\}$

Q2 : Énoncé de :

Propriété 2
Soient F et G deux sev de E de dimensions finies en somme directe.
On a alors $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$

Q3 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 3
Dans un ev de dimension finie :

1. Une famille génératrice reste génératrice si on lui enlève un vecteur qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille.
2. Une famille libre reste libre si on lui ajoute un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

Q4 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 4
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sev de E. Alors F admet un supplémentaire.

Q5 : Énoncé de :

Propriété 5
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sev de E de dimension finie. On pose $F = \mathrm{Vect}(f_1, .., f_p)$ et $G = \mathrm{Vect}(g_1, .., g_r)$. On note $\mathcal{H} = (f_1, ..., f_p, g_1, ..., g_r)$. Alors $\mathcal{H}$ est une famille génératrice de $F + G$ et

1. Si $\mathcal{H}$ est libre, alors F et G sont en somme directe.
2. Si E est de dimension finie et que $\mathcal{H}$ est une base de E, alors F et G sont supplémentaires dans E.

Q6 : Énoncé de :

Propriété 1
Soient E un ev de dimension finie et F et G deux sev de E. Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont supplémentaires dans E.
2. $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.
3. $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.