

Programme de Colle 1

Semaine 40 – du 2 au 6 octobre 2023

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) sur 2 points
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de *l'ensemble* du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 1 : Nombres réels

1. L'ensemble des rationnels, des irrationnels
 - 1.1. Définitions
 - 1.2. Stabilité des rationnels
2. Parties de l'ensemble des réels
 - 2.1. Majorants, minorants
 - 2.2. Plus grand et plus petit élément
 - 2.3. Bornes inférieures et bornes supérieures
 - 2.4. Intervalles
3. Valeur absolue, partie entière
 - 3.1. Valeur absolue d'un réel
 - 3.2. Partie entière d'un réel
 - 3.3. Densité des rationnels et des irrationnels

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur** !

Questions de cours :

- Q1. Démonstration de $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
- Q2. Énoncé et démonstration « *Plus petit élément et partie de \mathbb{N}* ».



Théorème

Plus petit élément et partie de \mathbb{N}

Toute partie non vide de \mathbb{N} possède un plus petit élément.

- Q3. Énoncé et démonstration « *Inégalité triangulaire inverse* ».



Théorème

Inégalité triangulaire inverse

Soient $x, y \in \mathbb{R}$:

$$||x| - |y|| \leq |x + y|.$$

Q4. Énoncé et démonstration « \mathbb{R} est archimédien ».



Théorème \mathbb{R} est archimédien

L'ensemble \mathbb{R} est *archimédien*, i.e. : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, x < ny$.

Q5. Énoncé « *Densité des rationnels et des irrationnels* » et démonstration pour les rationnels.



Théorème *Densité des rationnels et des irrationnels*

- (i) Tout intervalle non vide et non réduit à un singleton contient au moins un rationnel.
On dit que \mathbb{Q} est *dense* dans \mathbb{R} .
- (ii) Tout intervalle non vide et non réduit à un singleton contient au moins un irrationnel.
On dit que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est *dense* dans \mathbb{R} .

Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 1 : Logique et ensembles

Tout le chapitre est au programme

Chapitre 2 : Calculs algébriques

Révisions de Terminale : fiche méthode 1 (leçon et exercices)

1 Sommes et produits

1.1 Sommes et produits finis

1.2 Changements d'indices

1.3 Sommes et produits télescopiques

1.4 Résultats classiques A CONNAÎTRE PAR COEUR

$$\sum_{k=1}^n k, \quad \sum_{k=1}^n k^2, \quad \sum_{k=1}^n k^3, \quad \sum_{k=0}^n a^k, \quad a^n - b^n$$

2 Coefficients binomiaux

Important : Seul le cours est au programme pour le chapitre 2, les séances de TD portant sur ce chapitre n'ont pas encore été faites.

Les exercices proposés en colle ne porteront donc que sur le chapitre 1 et sur la fiche méthode 1.

Questions de cours

Q1 : Énoncé et démonstration de la règle de Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Q2 : Énoncé et démonstration de

1. $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}A - \text{card}(A \cap B)$
2. $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$
3. $\text{card}\overline{A} = \text{card}E - \text{card}A$

Q3 : Donner l'énoncé de la définition du produit cartésien de deux ensembles et un exemple.

Définition

Soit E et F deux ensembles.

On appelle produit cartésien de E et F et l'on note $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$. Si $E \neq F$, $E \times F$ et $F \times E$ sont distincts. Si $E = F$, on note $E \times E = E^2$.

Q4 : Énoncé et démonstration de la formule $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

Q5 : Énoncé et démonstration de la formule du binôme de Newton.

Q6 : Énoncé de toutes les formules de la propriété du paragraphe « Résultats classiques »