Année 2023-2024
Promo 31 – 1ère Année

Programme de Colle 21
Semaine 13 – du 25 au 29 mars 2024

Toutes les colles commenceront par :

✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative)
ou une primitive usuelle **ou** un équivalent usuel en 0 ainsi que son écriture équivalente avec o, sur 2 points.

✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de ***l'ensemble*** du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 5 : Limites et comparaison des fonctions (Tout le chapitre)

Chapitre 6 : Continuité (Tout le chapitre)

Chapitre 7 : Dérivabilité

1. Définitions et premières propriétés
    - 1.1. Définitions
    - 1.2. Opérations sur la dérivabilité
2. Les grands théorèmes
    - 2.1. Extrema locaux et points critiques
    - 2.2. Théorème de Rolle
    - 2.3. Théorème et inégalité des accroissements finis
    - 2.4. Constance, monotonie et dérivabilité
    - 2.5. Théorème de la limite de la dérivée
    - 2.6. Inégalité des accroissements finis et suites récurrentes
3. Plan d'étude d'une fonction
    - 3.1. Étude de l'ensemble de définition, de l'ensemble d'étude
    - 3.2. Prolongements éventuels aux bords
    - 3.3. Continuité, dérivabilité
    - 3.4. Sens de variation
    - 3.5. Étude des branches infinies
    - 3.6. Représentation graphique
4. Dérivées successives
    - 4.1. Classe d'une fonction
    - 4.2. Opérations sur les dérivées successives, formule de Leibniz
    - 4.3. Formule de Taylor-Lagrange

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur !**

Liste des équivalents usuels en 0 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

- **Logarithme, exponentielle, puissances :**

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \iff e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \iff (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques circulaires :**

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \iff \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$
$$\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \tan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques circulaires inverses :**

$$\mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \mathrm{Arcsin}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \mathrm{Arctan}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques hyperboliques :**

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \mathrm{sh}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \iff \mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$
$$\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \mathrm{th}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

Questions de cours :

Q1. Énoncé « *Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration* » et démonstration du théorème des gendarmes

Théorème *Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration*

Soient X une partie de $\mathbb{R}$, $f, m, M : X \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) Théorème des gendarmes/d'encadrements :

Si $\lim\limits_a m = \lim\limits_a M = \ell$ et si $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f$ **existe** et vaut ℓ.

(ii) Théorème de minoration :

Si $\lim\limits_a m = +\infty$ et si $f(x) \geqslant m(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f$ **existe** et vaut $+\infty$.

(iii) Théorème de majoration :

Si $\lim\limits_a M = -\infty$ et si $f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f$ **existe** et vaut $-\infty$.

Q2. Énoncé et démonstration du « *Théorème des valeurs intermédiaires ou TVI* »

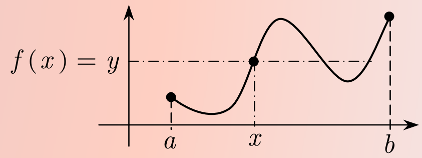
Théorème *Théorème des valeurs intermédiaires ou TVI*

Soient I un **intervalle,** $a, b \in I$.

Si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, alors toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ possède **au moins** un antécédent par f entre a et b.

i.e. (en supposant en plus que $f(a) < f(b)$) :

$$\forall y \in [f(a), f(b)], \quad \exists x \in I, \quad f(x) = y$$



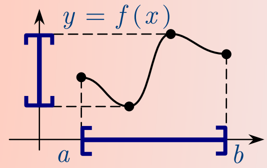
Q3. Énoncé et démonstration « *Théorème des bornes atteintes* »

Théorème *Théorème des bornes atteintes*

✓ Toute fonction continue sur un segment, est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit :

✓ L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.



Q4. Énoncé et démonstration « *Théorème de Rolle* »

Théorème *Théorème de Rolle*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.

Alors : $$\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$$

Q5. Énoncé et démonstration « *Théorème de la limite de la dérivée* »

Théorème *Théorème de la limite de la dérivée*

Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

(i) Si f est continue en a, dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et f' admet une limite finie ℓ en a,

Alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$, donc f' est continue en a.

(ii) Si f est continue en a, dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et f' admet une limite infinie $(\pm\infty)$ en a,

Alors f n'est pas dérivable en a, et le graphe de f possède une tangente verticale au point d'abscisse a.

Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 9 : Espaces vectoriels

Tout le chapitre est au programme.

Chapitre 10 : Espaces vectoriels de dimensions finies

Tout le chapitre est au programme

Chapitre 11 : Applications linéaires

Tout le chapitre est au programme

Dans toute la leçon, $\mathbb{K}$ représente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1 Généralités

1.1 Définitions

1.2 Exemples

1.3 Opérations sur les applications linéaires

1.4 Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

1.5 Injectivité et surjectivité

2 Applications linéaires définies sur un ev de dimension finie

2.1 Image d'une famille de vecteurs

2.2 Rang d'une application linaire

2.3 Théorème du rang

3 Applications linéaires particulières

3.1 Homothéties

3.2 Projections et symétries vectorielles

Questions de cours page suivante.

Questions de cours

Q1 : Énoncé de :

Propriété 1
Soient E un ev de dimension finie et F et G deux sev de E.
Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont supplémentaires dans E.
2. $F \cap G = \{0_E\} \quad \text{et} \quad \dim F + \dim G = \dim E$.
3. $F + G = E \quad \text{et} \quad \dim F + \dim G = \dim E$.

Q2 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 1
Dans un ev de dimension finie :

1. Une famille génératrice reste génératrice si on lui enlève un vecteur qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille.
2. Une famille libre reste libre si on lui ajoute un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

Q3 : Énoncé de :

Propriété 2
Soient E un $\mathbb{K}$-ev et F et G deux sev de E **de dimension finie**. On pose $F = \text{Vect}(f_1, .., f_p)$ et $G = \text{Vect}(g_1, .., g_r)$. On note $\mathcal{H} = (f_1, ..., f_p, g_1, ..., g_r)$. Alors $\mathcal{H}$ est une famille génératrice de $F + G$ et

1. Si $\mathcal{H}$ est libre, alors F et G sont en somme directe.
2. Si E est de dimension finie et que $\mathcal{H}$ est une base de E, alors F et G sont supplémentaires dans E.

Q4 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 3
Soit f une application linéaire de E vers F.

1. f est injective ssi $\ker(f) = \{0_E\}$.
2. f est surjective ssi $\text{Im}(f) = F$.
3. f est bijective donc est un isomorphisme ssi $\ker(f) = \{0_E\}$ et $\text{Im}(f) = F$.

Q5 : Énonce et démonstration de :

Propriété 4
Soit E et F deux ev de dimensions finies et égales. Alors les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est un isomorphisme de E sur F.
2. $\ker(f) = \{0_E\}$.
3. $\text{Im}(f) = F$.