Année 2023-2024
Promo 31 – $1^{\text{ère}}$ Année

Programme de Colle 23
Semaine 15 – du 8 au 12 avril 2024

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative)
  ou une primitive usuelle **ou** un équivalent usuel en 0 ainsi que son écriture équivalente avec o, sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de ***l'ensemble*** du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 5 : Limites et comparaison des fonctions (Tout le chapitre)

Chapitre 6 : Continuité (Tout le chapitre)

Chapitre 7 : Dérivabilité

1. Définitions et premières propriétés
   - 1.1. Définitions
   - 1.2. Opérations sur la dérivabilité
2. Les grands théorèmes
   - 2.1. Extrema locaux et points critiques
   - 2.2. Théorème de Rolle
   - 2.3. Théorème et inégalité des accroissements finis
   - 2.4. Constance, monotonie et dérivabilité
   - 2.5. Théorème de la limite de la dérivée
   - 2.6. Inégalité des accroissements finis et suites récurrentes
3. Plan d'étude d'une fonction
   - 3.1. Étude de l'ensemble de définition, de l'ensemble d'étude
   - 3.2. Prolongements éventuels aux bords
   - 3.3. Continuité, dérivabilité
   - 3.4. Sens de variation
   - 3.5. Étude des branches infinies
   - 3.6. Représentation graphique
4. Dérivées successives
   - 4.1. Classe d'une fonction
   - 4.2. Opérations sur les dérivées successives, formule de Leibniz
   - 4.3. Formule de Taylor-Lagrange

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur !**

Liste des équivalents usuels en 0 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

- **Logarithme, exponentielle, puissances :**

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \iff e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \iff (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques circulaires :**

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \iff \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$
$$\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \tan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques circulaires inverses :**

$$\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \operatorname{Arcsin}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \operatorname{Arctan}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques hyperboliques :**

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \operatorname{sh}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \iff \operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$
$$\operatorname{th}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \operatorname{th}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

Questions de cours :

Q1. Énoncé « *Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration* » et démonstration du théorème des gendarmes

Théorème *Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration*

Soient X une partie de $\mathbb{R}$, $f, m, M : X \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) Théorème des gendarmes/d'encadrements :

Si $\lim\limits_a m = \lim\limits_a M = \ell$ et si $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f$ **existe** et vaut ℓ.

(ii) Théorème de minoration :

Si $\lim\limits_a m = +\infty$ et si $f(x) \geqslant m(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f$ **existe** et vaut $+\infty$.

(iii) Théorème de majoration :

Si $\lim\limits_a M = -\infty$ et si $f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f$ **existe** et vaut $-\infty$.

Q2. Énoncé et démonstration du « *Théorème des valeurs intermédiaires ou TVI*»

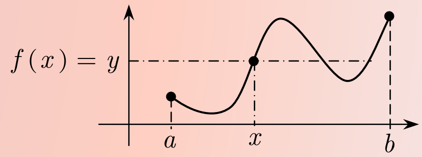
Théorème *Théorème des valeurs intermédiaires ou TVI*

Soient I un **intervalle,** $a,b \in I$.

Si $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, alors toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ possède **au moins** un antécédent par f entre a et b.

i.e. (en supposant en plus que $f(a) < f(b)$) :

$$\forall y \in [f(a), f(b)], \quad \exists x \in I, \quad f(x) = y$$



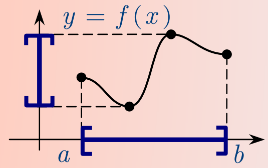
Q3. Énoncé et démonstration « *Théorème des bornes atteintes* »

Théorème *Théorème des bornes atteintes*

✓ Toute fonction continue sur un segment, est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit :

✓ L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.



Q4. Énoncé et démonstration « *Théorème de Rolle* »

Théorème *Théorème de Rolle*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.

Alors : $\exists c \in]a,b[, f'(c) = 0$

Q5. Énoncé et démonstration « *Théorème de la limite de la dérivée* »

Théorème *Théorème de la limite de la dérivée*

Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

(i) Si f est continue en a, dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et f' admet une limite finie ℓ en a,

Alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$, donc f' est continue en a.

(ii) Si f est continue en a, dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et f' admet une limite infinie $(\pm\infty)$ en a,

Alors f n'est pas dérivable en a, et le graphe de f possède une tangente verticale au point d'abscisse a.

Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 11 : Applications linéaires

Tout le chapitre est au programme

Chapitre 12 : Probabilités

Tout le chapitre est au programme

1 Ensembles dénombrables

2 Expérience aléatoires, issues et événements

3 Espace probabilisé

4 Indépendance et probabilité conditionnelle

4.1 Probabilité conditionnelle

4.2 Notion d'indépendance

4.3 Formule des probabilités composées

4.4 Formule des probabilités totales

4.5 Formule de Baye

5 Suites d'événements

Théorème de continuité monotone.

Les variables aléatoires ne sont pas au programme

Questions de cours

Q1 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 1
Soit f une application linéaire de E vers F.

1. f est injective ssi $\ker(f) = \{0_E\}$.
2. f est surjective ssi $\mathrm{Im}(f) = F$.
3. f est bijective donc est un isomorphisme ssi $\ker(f) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}(f) = F$.

Q2 : Énonce et démonstration de :

Propriété 2
Soit E et F deux ev de dimensions finies et égales. Alors les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est un isomorphisme de E sur F.
2. $\ker(f) = \{0_E\}$.
3. $\mathrm{Im}(f) = F$.

Q3 : Énoncé de la définition d'une probabilité

Définition 1
On appelle **probabilité** sur Ω toute application $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que :

- $P(\Omega) = 1$;
- pour tout couple (A, B) de parties **disjointes** de Ω, $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Q4 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 3
Soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ un événement.

Si $P(B) > 0$, alors l'application P_B définie par : $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\quad \boxed{P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}}$

est une probabilité sur (Ω, P), appelée **probabilité conditionnelle sachant** B.

Q5 : Énoncé des formules : probabilités composées, formules des probabilités totales et formules de Bayes

Propriété 4
Formule des probabilités composées :
Soit A, B deux événements . Alors :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B)P_B(A) = P(A)P_A(B)}$$

Plus généralement, si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille d'événements , alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3).....P_{A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Propriété 5
Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un **système complet d'événements** de Ω.
Alors pour tout événement $B \in \mathscr{P}(\Omega)$,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)$$

Dans le cas du système complet $\{A, \overline{A}\}$, on obtient

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$$

Propriété 6
Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(B) \neq 0$ et $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un **système complet d'événements** de Ω. Alors :

$$\forall k \in [|1, n|], \quad P_B(A_k) = \frac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)}$$

dans le cas du système complet $\{A, \overline{A}\}$, on obtient :

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)}$$