

Programme de Colle 24 Semaine 16 – du 15 au 19 avril 2024

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative)
ou une primitive usuelle **ou** un équivalent usuel en 0 ainsi que son écriture équivalente avec o **ou** un développement limité usuel en 0, sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de *l'ensemble* du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 5 : Limites et comparaison des fonctions (Tout le chapitre)

Chapitre 6 : Continuité (Tout le chapitre)

Chapitre 7 : Dérivabilité (Tout le chapitre)

Chapitre 8 : Développements limités

1. Définitions et premières propriétés
2. Obtention des développements limités usuels en 0
 - 2.1. La formule de Taylor-Young
 - 2.2. Primitivation et dérivation des développements limités
3. Opérations sur les développements limités
4. Applications
 - 4.1. Développements limités au voisinage d'un point autre que 0
 - 4.2. Calculs de limites et recherche d'équivalents
 - 4.3. Étude locale d'une fonction au voisinage d'un point
 - 4.4. Étude locale d'une fonction au voisinage de l'infini

Développements limités et équivalents usuels en 0

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus par cœur !

Questions de cours :

Q1. Énoncé et démonstration « *Théorème des bornes atteintes* »

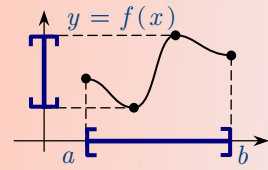


Théorème *Théorème des bornes atteintes*

✓ Toute fonction continue sur un segment, est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit :

✓ L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.



Q2. Énoncé et démonstration « *Théorème de Rolle* »



Théorème *Théorème de Rolle*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.

Alors : $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$

Q3. Énoncé et démonstration « *Inégalité des accroissements finis* »



Théorème *Inégalité des accroissements finis*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et si $\exists k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq k$.

Alors : $\forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

Q4. Énoncé et démonstration « *Théorème de la limite de la dérivée* »



Théorème *Théorème de la limite de la dérivée*

Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

(i) Si f est continue en a , dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et f' admet une limite finie ℓ en a ,

Alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$, donc f' est continue en a .

(ii) Si f est continue en a , dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et f' admet une limite infinie ($\pm\infty$) en a ,

Alors f n'est pas dérivable en a , et le graphe de f possède une tangente verticale au point d'abscisse a .

Q5. Énoncé et démonstration « *Formule de Taylor-Young* »



Théorème *Formule de Taylor-Young*

Soient I un intervalle, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

Alors, f admet un $DL_n(a)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \quad (\text{Formule de Taylor-Young})$$

Q6. Énoncé et démonstration « *Primitivation des développements limités* »



Théorème *Primitivation des développements limités*

Soient I un intervalle, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

Si f' admet un $DL_n(a)$: $f'(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$, avec $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,

alors f admet un $DL_{n+1}(a)$: $f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o_{x \rightarrow a}((x-a)^{n+1})$

Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 11 : Applications linéaires

Tout le chapitre est au programme

Chapitre 12 : Probabilités

Tout le chapitre est au programme

- 1 Ensembles dénombrables
- 2 Expérience aléatoires, issues et événements
- 3 Espace probabilisé
- 4 Indépendance et probabilité conditionnelle
 - 4.1 Probabilité conditionnelle
 - 4.2 Notion d'indépendance
 - 4.3 Formule des probabilités composées
 - 4.4 Formule des probabilités totales
 - 4.5 Formule de Baye
- 5 Suites d'événements

Théorème de continuité monotone.

Les variables aléatoires ne sont pas au programme

Questions de cours

Q1 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 1

Soit f une application linéaire de E vers F .

1. f est injective ssi $\ker(f) = \{0_E\}$.
2. f est surjective ssi $\text{Im}(f) = F$.
3. f est bijective donc est un isomorphisme ssi $\ker(f) = \{0_E\}$ et $\text{Im}(f) = F$.

Q2 : Énonce et démonstration de :

Propriété 2

Soit E et F deux ev de dimensions finies et égales. Alors les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est un isomorphisme de E sur F .
2. $\ker(f) = \{0_E\}$.
3. $\text{Im}(f) = F$.

Q3 : Énoncé de la définition d'une probabilité

Définition 1

On appelle **probabilité** sur Ω toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ telle que :

- $P(\Omega) = 1$;
- pour tout couple (A, B) de parties **disjointes** de Ω , $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Q4 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 3

Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement.

Si $P(B) > 0$, alors l'application P_B définie par : $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ est une probabilité sur (Ω, P) , appelée **probabilité conditionnelle sachant B** .

Q5 : Énoncé des formules : probabilités composées, formules des probabilités totales et formules de Bayes

Propriété 4

Formule des probabilités composées :

Soit A, B deux événements . Alors :

$$P(A \cap B) = P(B)P_B(A) = P(A)P_A(B)$$

Plus généralement, si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille d'événements , alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Propriété 5

Soit (Ω, P) un espace probablisé, $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un **système complet d'événements** de Ω .

Alors pour tout événement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P_{A_i}(B)$$

Dans le cas du système complet $\{A, \bar{A}\}$, on obtient

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$$

Propriété 6

Soit (Ω, P) un espace probablisé, $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(B) \neq 0$ et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un **système complet d'événements** de Ω . Alors :

$$\forall k \in [1, n], \quad P_B(A_k) = \frac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P_{A_i}(B)}$$

dans le cas du système complet $\{A, \bar{A}\}$, on obtient :

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)}$$