Année 2023-2024
Promo 31 – 1$^{\text{ère}}$ Année

Programme de Colle 25
Semaine 18 – du 29 avril au 3 mai 2024

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative) **ou** une primitive usuelle **ou** un équivalent usuel en 0 ainsi que son écriture équivalente avec o **ou** un développement limité usuel en 0, sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de ***l'ensemble*** du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 5 : Limites et comparaison des fonctions (Tout le chapitre)

Chapitre 6 : Continuité (Tout le chapitre)

Chapitre 7 : Dérivabilité (Tout le chapitre)

Chapitre 8 : Développements limités

1. Définitions et premières propriétés
2. Obtention des développements limités usuels en 0
   - 2.1. La formule de Taylor-Young
   - 2.2. Primitivation et dérivation des développements limités
3. Opérations sur les développements limités
4. Applications
   - 4.1. Développements limités au voisinage d'un point autre que 0
   - 4.2. Calculs de limites et recherche d'équivalents
   - 4.3. Étude locale d'une fonction au voisinage d'un point
   - 4.4. Étude locale d'une fonction au voisinage de l'infini

Développements limités et équivalents usuels en 0

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur !**

Questions de cours :

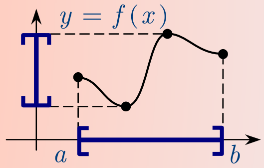
Q1. Énoncé et démonstration « *Théorème des bornes atteintes* »

Théorème *Théorème des bornes atteintes*

✓ Toute fonction continue sur un segment, est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit :

✓ L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.



Q2. Énoncé et démonstration « *Théorème de Rolle* »

Théorème *Théorème de Rolle*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.

Alors : $$\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$$

Q3. Énoncé et démonstration « *Inégalité des accroissements finis* »

Théorème *Inégalité des accroissements finis*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et si $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leqslant k$.

Alors : $$\forall x, y \in [a, b], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$

Q4. Énoncé et démonstration « *Théorème de la limite de la dérivée* »

Théorème *Théorème de la limite de la dérivée*

Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

(i) Si f est continue en a, dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et f' admet une limite finie ℓ en a,

Alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$, donc f' est continue en a.

(ii) Si f est continue en a, dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et f' admet une limite infinie $(\pm\infty)$ en a,

Alors f n'est pas dérivable en a, et le graphe de f possède une tangente verticale au point d'abscisse a.

Q5. Énoncé et démonstration « *Formule de Taylor-Young* »

Théorème *Formule de Taylor-Young*

Soient I un intervalle, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

Alors, f admet un $DL_n(a)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \underset{x \to a}{o}\left((x - a)^n\right) \qquad \text{(Formule de Taylor-Young)}$$

Q6. Énoncé et démonstration « *Primitivation des développements limités* »

Théorème *Primitivation des développements limités*

Soient I un intervalle, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

Si f' admet un $DL_n(a)$: $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - a)^k + \underset{x \to a}{o}\left((x - a)^n\right)$, avec $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,

alors f admet un $DL_{n+1}(a)$: $f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x - a)^{k+1}}{k + 1} + \underset{x \to a}{o}\left((x - a)^{n+1}\right)$

Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 11 : Applications linéaires

Tout le chapitre est au programme

Chapitre 12 : Probabilités

Tout le chapitre est au programme

Chapitre 12 : Matrices

1 Définitions

2 Espace vectoriel $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$

3 Produit matriciel

4 Matrices carrées inversibles

5 Calcul pratique de l'inverse d'une matrice carrée

Les deux méthodes vues en classe sont l'utilisation d'un système et la méthode de Gauss

6 Transposition

7 Trace d'une matrice carrée

Les matrices d'applications linéaires ne sont pas au programme cette semaine

Questions de cours page suivante.

Questions de cours

Q1 : Énonce et démonstration de :

Propriété 1
Soit E et F deux ev de dimensions finies et égales. Alors les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est un isomorphisme de E sur F.
2. $\ker(f) = \{0_E\}$.
3. $\mathrm{Im}(f) = F$.

Q2 : Énoncé de la définition d'une probabilité

Définition 1
On appelle **probabilité** sur Ω toute application $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que :
- $P(\Omega) = 1$;
- pour tout couple (A, B) de parties **disjointes** de Ω, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Q3 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 2
Soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ un événement.
Si $P(B) > 0$, alors l'application P_B définie par : $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\boxed{P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}}$
est une probabilité sur (Ω, P), appelée **probabilité conditionnelle sachant** B.

Q4 : Énoncé des formules : probabilités composées, formules des probabilités totales et formules de Bayes (voir programme de colle précédent)

Q5 : Énoncé de :
Caractérisation des matrices inversibles

Propriété 3
Caractérisation des matrices inversibles :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. **La matrice A est inversible ssi pour tout second membre $Y \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire : $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une et une seule solution.**
En particulier, le système $AX = 0_n$ admet une unique solution.
Donc $\boxed{A \text{ est inversible ssi les vecteurs colonnes de } A \text{ forment une famille libre dans } \mathbb{K}^n.}$

Q6 : Énoncé de :
Définitions et propriétés de la trace et de la transposition.

Propriété 4
Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. Linéarité : $\mathrm{Tr}(A + \lambda B) = \mathrm{Tr}(A) + \lambda \mathrm{Tr}(B)$.
2. $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$
3. $\mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A)$

Propriété 5
Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. Linéarité : ${}^t(A + \lambda B) = {}^tA + \lambda {}^tB$
2. ${}^t({}^tA) = A$
3. ${}^t(BC) = {}^tC\,{}^tB$
4. $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$