Année 2023-2024
Promo 31 – $1^{\text{ère}}$ Année

Programme de Colle 27
Semaine 21 – du 21 au 25 mai 2024

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative)
  ou une primitive usuelle **ou** un équivalent usuel en 0 ainsi que son écriture équivalente avec o **ou** un développement limité usuel en 0, sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de ***l'ensemble*** du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 5 : Limites et comparaison des fonctions (Tout le chapitre)

Chapitre 6 : Continuité (Tout le chapitre)

Chapitre 7 : Dérivabilité (Tout le chapitre)

Chapitre 8 : Développements limités (Tout le chapitre)

Chapitre 9 : Fractions rationnelles

1. Vocabulaire des fractions rationnelles
2. Décomposition en éléments simples
   - 2.1. Partie entière
   - 2.2. Partie polaire
   - 2.3. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$
   - 2.4. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$
   - 2.5. Division suivant les puissances croissantes et partie polaire

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur !**

Questions de cours :

Q1. Énoncé et démonstration « *Théorème de la limite de la dérivée* »

Théorème *Théorème de la limite de la dérivée*

Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

(i) Si f est continue en a, dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et f' admet une limite finie ℓ en a,

Alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$, donc f' est continue en a.

(ii) Si f est continue en a, dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et f' admet une limite infinie $(\pm\infty)$ en a,

Alors f n'est pas dérivable en a, et le graphe de f possède une tangente verticale au point d'abscisse a.

Q2. Énoncé et démonstration « *Formule de Taylor-Young* »

Théorème *Formule de Taylor-Young*

Soient I un intervalle, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

Alors, f admet un $DL_n(a)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right) \qquad \text{(Formule de Taylor-Young)}$$

Q3. Énoncé et démonstration « *Primitivation des développements limités* »

Théorème *Primitivation des développements limités*

Soient I un intervalle, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

Si f' admet un $DL_n(a)$: $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right)$, avec $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,

alors f admet un $DL_{n+1}(a)$: $f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$

Q4. Énoncé et démonstration « *Partie entière d'une fraction rationnelle* »

Théorème *Partie entière d'une fraction rationnelle*

Soit $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$.

Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ et une unique fraction rationnelle $Q \in \mathbb{K}(X)$ tels que :

$$R = E + Q \text{ et } \deg Q < 0$$

Le polynôme E est appelé la *partie entière* de R. Il est égal au quotient de la division euclidienne de A par B.

Q5. Énoncé et démonstration « *Division suivant les puissances croissantes et partie polaire* »

Théorème *Division suivant les puissances croissantes et partie polaire*

Soit a un pôle de multiplicité $\alpha \in \mathbb{N}^*$ de la fraction $F \in \mathbb{K}(X) \setminus \{0\}$, dont la forme irréductible est $\frac{N}{D}$, avec $D = (X-a)^\alpha Q$, $Q(a) \neq 0$.

Posons $X - a = Y$, où Y est considéré comme une nouvelle indéterminée sur $\mathbb{K}$.

Divisons $N(a+Y)$ par $Q(a+Y)$, suivant les puissances croissantes de Y, à l'ordre $\alpha - 1$:

(1) $N(a+Y) = Q(a+Y) \times \left(c_0 + c_1 Y + \cdots + c_{\alpha-1} Y^{\alpha-1}\right) + Y^\alpha R(Y)$, où $c_i \in \mathbb{K}$ et $R \in \mathbb{K}[Y]$.

Alors la partie polaire de F relative au pôle a est :

$$\frac{c_0}{(X-a)^\alpha} + \frac{c_1}{(X-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{c_{\alpha-1}}{X-a}.$$

Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 12 : Probabilités

Tout le chapitre est au programme

Chapitre 12 : Matrices

1 Définitions

2 Espace vectoriel $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$

3 Produit matriciel

4 Matrices carrées inversibles

5 Calcul pratique de l'inverse d'une matrice carrée

Les deux méthodes vues en classe sont l'utilisation d'un système et la méthode de Gauss

6 Transposition

7 Trace d'une matrice carrée

8 Matrices et applications linéaires

8.1 Application linéaire associée à une matrice

8.2 Matrice d'une application linéaire dans des bases

8.3 Changement de bases

8.4 Matrices équivalentes

8.5 Matrices semblables

Questions de cours page suivante.

Questions de cours

Q1 : Énoncé de :
Caractérisation des matrices inversibles

Propriété 1
Caractérisation des matrices inversibles :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. **La matrice A est inversible ssi pour tout second membre $Y \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire : $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une et une seule solution.**
En particulier, le système $AX = 0_n$ admet une unique solution.
Donc $\boxed{A \text{ est inversible ssi les vecteurs colonnes de } A \text{ forment une famille libre dans } \mathbb{K}^n.}$

Q2 : Énoncé de :

Définition 1
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies respectives p et n, $\mathscr{B} = (e_1, .., e_p)$ une base de E, $\mathscr{C} = (f_1, .., f_n)$ une base de F et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
On appelle matrice de f dans $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ et on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ la matrice de la famille
$f(\mathscr{B}) = (f(e_1), .., f(e_p))$ dans la base $\mathscr{C}$. $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f(\mathscr{B}))}$
Si $E = F$ et $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Q3 : Énoncé de :

Propriété 2
Rang d'une application linéaire. Soient E et F deux ev de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f))$.

Q4 : Énoncé de :

Propriété 3
Soient E, F, G trois ev de dimensions finies non nulles, de bases respectives $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ et $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $g \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors $\boxed{Mat_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)}$.
Soient E et F deux ev de même dimension finie non nulle,de bases respectives $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible.
Dans ce cas, on a $\boxed{Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) = (Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f))^{-1}}$.

Q5 : Définitions des matrices semblables et équivalentes :

Définition 2
Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que B est **équivalente à** A s'il existe deux matrices $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ (donc carrées et inversibles) pour lesquelles : $\boxed{B = Q^{-1}AP}$.

Définition 3
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que B est **semblable à** A s'il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ (donc carrée et inversible) pour laquelle : $\boxed{B = P^{-1}AP}$.

Q6 : Énoncé de : Changement de bases pour une application linéaire.

Propriété 4
Soit $E \neq \{0_E\}$ et $F \neq \{0_F\}$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Soit $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases de E et $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ deux bases de F et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
On pose $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, $Q = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$, $A = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $A' = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$. Alors $\boxed{A' = Q^{-1}AP}$.