

Programme de Colle 2

Semaine 41 – du 9 au 13 octobre 2023

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) sur 2 points
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de *l'ensemble* du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 1 : Nombres réels

1. L'ensemble des rationnels, des irrationnels
 - 1.1. Définitions
 - 1.2. Stabilité des rationnels
2. Parties de l'ensemble des réels
 - 2.1. Majorants, minorants
 - 2.2. Plus grand et plus petit élément
 - 2.3. Bornes inférieures et bornes supérieures
 - 2.4. Intervalles
3. Valeur absolue, partie entière
 - 3.1. Valeur absolue d'un réel
 - 3.2. Partie entière d'un réel
 - 3.3. Densité des rationnels et des irrationnels

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur** !

Questions de cours :

- Q1. Démonstration de $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
- Q2. Énoncé et démonstration « *Plus grand élément et partie de \mathbb{N}* ».



Théorème *Plus grand élément et partie de \mathbb{N}*

Toute partie non vide **majorée** de \mathbb{N} possède un plus grand élément.

- Q3. Énoncé de la définition d'un intervalle de \mathbb{R} .



Définition *Intervalle de \mathbb{R}*

Soit I une partie non vide de \mathbb{R} , on dit que I est un *intervalle* lorsque : tout réel compris entre deux éléments de I est lui-même un élément de I , i.e. :

$$\forall x, y \in I, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad (x \leq z \leq y \implies z \in I).$$

Par convention, \emptyset est un intervalle de \mathbb{R} .

Q4. Énoncé et démonstration « *Inégalité triangulaire inverse* ».



Théorème

Inégalité triangulaire inverse

Soient $x, y \in \mathbb{R}$:

$$||x| - |y|| \leq |x + y|.$$

Q5. Énoncé et démonstration « *\mathbb{R} est archimédien* ».



Théorème

\mathbb{R} est archimédien

L'ensemble \mathbb{R} est *archimédien*, i.e. : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, x < ny$.

Q6. Énoncé « *Densité des rationnels et des irrationnels* » et démonstration pour les rationnels.



Théorème

Densité des rationnels et des irrationnels

- (i) Tout intervalle non vide et non réduit à un singleton contient au moins un rationnel.
On dit que \mathbb{Q} est *dense* dans \mathbb{R} .
- (ii) Tout intervalle non vide et non réduit à un singleton contient au moins un irrationnel.
On dit que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est *dense* dans \mathbb{R} .

Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 1 : Logique et ensembles

Tout le chapitre est au programme

Chapitre 2 : Calculs algébriques

Révisions de Terminale : fiche méthode 1 (leçon et exercices)

Révisions de Terminale : fiche méthode 2 (leçon et exercices)

1 Sommes et produits

1.1 Sommes et produits finis

1.2 Changements d'indices

1.3 Sommes et produits télescopiques

1.4 Résultats classiques A CONNAÎTRE PAR COEUR

$$\sum_{k=1}^n k, \quad \sum_{k=1}^n k^2, \quad \sum_{k=1}^n k^3, \quad \sum_{k=0}^n a^k, \quad a^n - b^n$$

2 Coefficients binomiaux

Important : Pour les exercices de colle, seul le paragraphe 1 (sommés et produits) est au programme pour le chapitre 2, les séances de TD portant sur le paragraphe 2 n'ont pas encore été faites.

Questions de cours

Q1 : Énoncé et démonstration de la règle de Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Q2 : Énoncé et démonstration de

1. $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}A - \text{card}(A \cap B)$
2. $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$
3. $\text{card}\overline{A} = \text{card}E - \text{card}A$

Q3 : Donner l'énoncé de la définition du produit cartésien de deux ensembles et un exemple.

Définition

Soit E et F deux ensembles.

On appelle produit cartésien de E et F et l'on note $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$. Si $E \neq F$, $E \times F$ et $F \times E$ sont distincts. Si $E = F$, on note $E \times E = E^2$.

Q4 : Énoncé et démonstration de la formule $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

Q5 : Énoncé et démonstration de la formule du binôme de Newton.

Q6 : Énoncé de toutes les formules de la propriété du paragraphe « Résultats classiques »