

## Programme de Colle 2

### Semaine 41 – du 9 au 13 octobre 2023

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) sur 2 points
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de *l'ensemble* du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

## Analyse

### Chapitre 1 : Nombres réels

1. L'ensemble des rationnels, des irrationnels
  - 1.1. Définitions
  - 1.2. Stabilité des rationnels
2. Parties de l'ensemble des réels
  - 2.1. Majorants, minorants
  - 2.2. Plus grand et plus petit élément
  - 2.3. Bornes inférieures et bornes supérieures
  - 2.4. Intervalles
3. Valeur absolue, partie entière
  - 3.1. Valeur absolue d'un réel
  - 3.2. Partie entière d'un réel
  - 3.3. Densité des rationnels et des irrationnels

**Tous** les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur** !

### Questions de cours :

- Q1. Démonstration de  $\sqrt{2}$  n'est pas rationnel.
- Q2. Énoncé et démonstration « *Plus grand élément et partie de  $\mathbb{N}$*  ».



#### **Théorème** *Plus grand élément et partie de $\mathbb{N}$*

Toute partie non vide **majorée** de  $\mathbb{N}$  possède un plus grand élément.

- Q3. Énoncé de la définition d'un intervalle de  $\mathbb{R}$ .



#### **Définition** *Intervalle de $\mathbb{R}$*

Soit  $I$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ , on dit que  $I$  est un *intervalle* lorsque : tout réel compris entre deux éléments de  $I$  est lui-même un élément de  $I$ , i.e. :

$$\forall x, y \in I, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad (x \leq z \leq y \implies z \in I).$$

Par convention,  $\emptyset$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

**Q4.** Énoncé et démonstration « *Inégalité triangulaire inverse* ».



**Théorème**

*Inégalité triangulaire inverse*

Soient  $x, y \in \mathbb{R}$  :

$$||x| - |y|| \leq |x + y|.$$

**Q5.** Énoncé et démonstration «  *$\mathbb{R}$  est archimédien* ».



**Théorème**

*$\mathbb{R}$  est archimédien*

L'ensemble  $\mathbb{R}$  est *archimédien*, i.e. :  $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, x < ny$ .

**Q6.** Énoncé « *Densité des rationnels et des irrationnels* » et démonstration pour les rationnels.



**Théorème**

*Densité des rationnels et des irrationnels*

- (i) Tout intervalle non vide et non réduit à un singleton contient au moins un rationnel.  
On dit que  $\mathbb{Q}$  est *dense* dans  $\mathbb{R}$ .
- (ii) Tout intervalle non vide et non réduit à un singleton contient au moins un irrationnel.  
On dit que  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est *dense* dans  $\mathbb{R}$ .

## Algèbre

À la page suivante :

# Algèbre

## Chapitre 1 : Logique et ensembles

Tout le chapitre est au programme

## Chapitre 2 : Calculs algébriques

Révisions de Terminale : fiche méthode 1 (leçon et exercices)

Révisions de Terminale : fiche méthode 2 (leçon et exercices)

### 1 Sommes et produits

#### 1.1 Sommes et produits finis

#### 1.2 Changements d'indices

#### 1.3 Sommes et produits télescopiques

#### 1.4 Résultats classiques A CONNAÎTRE PAR COEUR

$$\sum_{k=1}^n k, \quad \sum_{k=1}^n k^2, \quad \sum_{k=1}^n k^3, \quad \sum_{k=0}^n a^k, \quad a^n - b^n$$

### 2 Coefficients binomiaux

**Important** : Pour les exercices de colle, seul le paragraphe 1 (sommés et produits) est au programme pour le chapitre 2, les séances de TD portant sur le paragraphe 2 n'ont pas encore été faites.

### Questions de cours

Q1 : Énoncé et démonstration de la règle de Morgan :  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .

Q2 : Énoncé et démonstration de

1.  $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}A - \text{card}(A \cap B)$
2.  $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$
3.  $\text{card}\overline{A} = \text{card}E - \text{card}A$

Q3 : Donner l'énoncé de la définition du produit cartésien de deux ensembles et un exemple.

#### Définition

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles.

On appelle produit cartésien de  $E$  et  $F$  et l'on note  $E \times F$  l'ensemble des couples  $(x, y)$  où  $x \in E$  et  $y \in F$ . Si  $E \neq F$ ,  $E \times F$  et  $F \times E$  sont distincts. Si  $E = F$ , on note  $E \times E = E^2$ .

Q4 : Énoncé et démonstration de la formule  $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

Q5 : Énoncé et démonstration de la formule du binôme de Newton.

Q6 : Énoncé de toutes les formules de la propriété du paragraphe « Résultats classiques »