

## Programme de Colle 3

### Semaine 42 – du 16 au 20 octobre 2023

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative) sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de *l'ensemble* du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

## Analyse

### Chapitre 1 : Nombres réels (Tout le chapitre)

### Chapitre 2 : Fonctions réelles

1. Vocabulaire des fonctions
  - 1.1. Définitions générales
  - 1.2. Ordre et fonctions
  - 1.3. Opérations sur les fonctions, composition
  - 1.4. Parité
  - 1.5. Fonctions périodiques
  - 1.6. Fonctions monotones, croissantes et décroissantes
  - 1.7. Théorème de continuité, de dérivabilité d'une fonction réciproque
2. Fonctions usuelles
  - 2.1. Fonction valeur absolue
  - 2.2. Fonctions puissances entières
  - 2.3. Logarithme népérien
  - 2.4. Exponentielle
  - 2.5. Fonctions puissances (quelconques)
  - 2.6. Croissances comparées
  - 2.7. Fonctions circulaires
  - 2.8. Fonctions circulaires inverses
  - 2.9. Fonctions hyperboliques

Formulaire de trigonométrie

Dérivées usuelles

Courbes représentatives des fonctions usuelles

**Tous** les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur** !

## Questions de cours :

**Q1.** Énoncé et démonstration « Plus grand élément et partie de  $\mathbb{N}$  ».



### **Théorème** Plus grand élément et partie de $\mathbb{N}$

Toute partie non vide **majorée** de  $\mathbb{N}$  possède un plus grand élément.

**Q2.** Énoncé et démonstration «  $\mathbb{R}$  est archimédien ».



### **Théorème** $\mathbb{R}$ est archimédien

L'ensemble  $\mathbb{R}$  est *archimédien*, i.e. :  $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \exists n \in \mathbb{N}, x < ny$ .

**Q3.** Énoncé et démonstration « Fonction bornée et valeur absolue ».



### **Théorème** Fonction bornée et valeur absolue

Soient  $E$  un ensemble inclus dans  $\mathbb{R}$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, on a équivalence entre :

- (i)  $f$  est bornée.
- (ii)  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, |f(x)| \leq M$ .
- (iii)  $|f|$  est majorée.

**Q4.** Énoncé et démonstration « Stricte monotonie et injectivité ».



### **Théorème** Stricte monotonie et injectivité

Soient  $E$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

Si  $f$  est strictement monotone sur  $E$ , alors  $f$  est injective.

**Q5.** Énoncé « Propriétés de la fonction logarithme népérien » et démonstration du (iii).



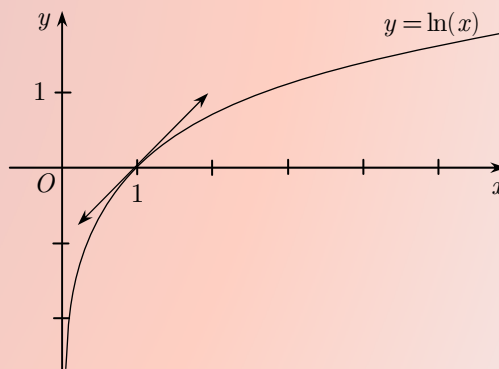
### **Théorème** Propriétés de la fonction logarithme népérien

- (i)  $\ln(1) = 0$
- (ii) La fonction  $\ln$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$$

donc  $\ln$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  et indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- (iii)  $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- (iv)  $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b), \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- (v)  $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) = n \ln(a)$ .  
 $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$
- (vi)  $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty, \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ .



## Algèbre

À la page suivante :

# Algèbre

## Chapitre 1 : Logique et ensembles

Tout le chapitre est au programme

Révisions de Terminale : fiche méthode 1 (leçon et exercices)

Révisions de Terminale : fiche méthode 2 (leçon et exercices)

## Chapitre 2 : Calculs algébriques

Tout le chapitre est au programme

### 1 Sommes et produits

#### 1.1 Sommes et produits finis

#### 1.2 Changements d'indices

#### 1.3 Sommes et produits télescopiques

#### 1.4 Résultats classiques A CONNAÎTRE PAR COEUR

$$\sum_{k=1}^n k, \quad \sum_{k=1}^n k^2, \quad \sum_{k=1}^n k^3, \quad \sum_{k=0}^n a^k, \quad a^n - b^n$$

### 2 Coefficients binomiaux

### 3 Sommes doubles, produit de sommes

#### 3.1 Somme sur un domaine rectangulaire

#### 3.2 Somme sur un domaine triangulaire

#### 3.3 Somme par partition

#### 3.4 Produit de deux sommes

Questions de cours page suivante

## Questions de cours

Q1 : Énoncé et démonstration de la règle de Morgan :  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .

Q2 : Énoncé et démonstration de

1.  $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}A - \text{card}(A \cap B)$
2.  $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$
3.  $\text{card}\overline{A} = \text{card}E - \text{card}A$

Q3 : Énoncé et démonstration de la formule  $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

Q4 : Énoncé et démonstration de la formule du binôme de Newton.

Q5 : Énoncé de toutes les formules de la propriété du paragraphe « Résultats classiques »

Q6 : Savoir écrire de deux façons différentes les sommes  $S = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij}$  et  $S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}$   
(sommes sur un domaine triangulaire)