Année 2023-2024
Promo 31 – $1^{\text{ère}}$ Année

Programme de Colle 4
Semaine 43 – du 23 au 27 octobre 2023

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative) sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de ***l'ensemble*** du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes …) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 1 : Nombres réels (Tout le chapitre)

Chapitre 2 : Fonctions réelles

1. Vocabulaire des fonctions
   - 1.1. Définitions générales
   - 1.2. Ordre et fonctions
   - 1.3. Opérations sur les fonctions, composition
   - 1.4. Parité
   - 1.5. Fonctions périodiques
   - 1.6. Fonctions monotones, croissantes et décroissantes
   - 1.7. Théorème de continuité, de dérivabilité d'une fonction réciproque
2. Fonctions usuelles
   - 2.1. Fonction valeur absolue
   - 2.2. Fonctions puissances entières
   - 2.3. Logarithme népérien
   - 2.4. Exponentielle
   - 2.5. Fonctions puissances (quelconques)
   - 2.6. Croissances comparées
   - 2.7. Fonctions circulaires
   - 2.8. Fonctions circulaires inverses
   - 2.9. Fonctions hyperboliques

Formulaire de trigonométrie
Dérivées usuelles
Courbes représentatives des fonctions usuelles

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur !**

Questions de cours :

Q1. Énoncé et démonstration « *Plus grand élément et partie de* $\mathbb{N}$ ».

Théorème *Plus grand élément et partie de* $\mathbb{N}$

Toute partie non vide **majorée** de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Q2. Énoncé et démonstration « $\mathbb{R}$ *est archimédien* ».

Théorème $\mathbb{R}$ *est archimédien*

L'ensemble $\mathbb{R}$ est *archimédien*, *i.e.* : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n \in \mathbb{N},\ x < ny$.

Q3. Énoncé et démonstration « *Fonction bornée et valeur absolue* ».

Théorème *Fonction bornée et valeur absolue*

Soient E un ensemble inclus dans $\mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on a équivalence entre :

(i) f est bornée.

(ii) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\ |f(x)| \leqslant M$.

(iii) $|f|$ est majorée.

Q4. Énoncé et démonstration « *Stricte monotonie et injectivité* ».

Théorème *Stricte monotonie et injectivité*

Soient E une partie de $\mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est strictement monotone sur E, alors f est injective.

Q5. Énoncé « *Propriétés de la fonction logarithme népérien* » et démonstration du **(iii)**.

Théorème *Propriétés de la fonction logarithme népérien*

(i) $\ln(1) = 0$

(ii) La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$$

donc ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

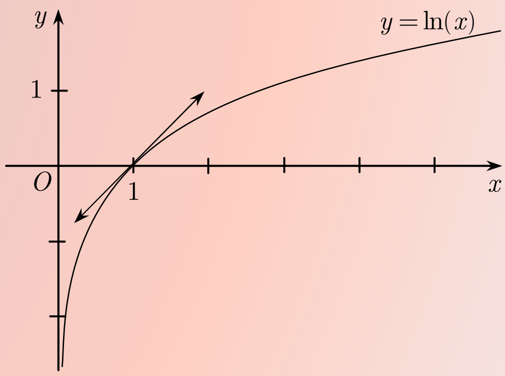
(iii) $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

(iv) $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b), \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

(v) $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(a^n) = n\ln(a)$.

$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$

(vi) $\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty, \quad \ln(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.



Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 1 : Logique et ensembles

Tout le chapitre est au programme

Révisions de Terminale : fiche méthode 1 (leçon et exercices)

Révisions de Terminale : fiche méthode 2 (leçon et exercices)

Chapitre 2 : Calculs algébriques

Tout le chapitre est au programme

1 Sommes et produits

1.1 Sommes et produits finis

1.2 Changements d'indices

1.3 Sommes et produits télescopiques

1.4 Résultats classiques A CONNAÎTRE PAR COEUR

$$\sum_{k=1}^{n} k, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3, \qquad \sum_{k=0}^{n} a^k, \qquad a^n - b^n$$

2 Coefficients binomiaux

3 Sommes doubles, produit de sommes

3.1 Somme sur un domaine rectangulaire

3.2 Somme sur un domaine triangulaire

3.3 Somme par partition

3.4 Produit de deux sommes

Questions de cours page suivante

Questions de cours

Q1 : Énoncé et démonstration de la règle de Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Q2 : Énoncé et démonstration de

1. $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}A - \text{card}(A \cap B)$
2. $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$
3. $\text{card}\overline{A} = \text{card}E - \text{card}A$

Q3 : Énoncé et démonstration de la formule $a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

Q4 : Énoncé et démonstration de la formule du binôme de Newton.

Q5 : Énoncé de toutes les formules de la propriété du paragraphe « Résultats classiques »

Q6 : Savoir écrire de deux façons différentes les sommes $S = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij}$ et $S = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}$

(sommes sur un domaine triangulaire)