Année 2023-2024
Promo 31 – 1ère Année

Programme de Colle 6
Semaine 46 – du 13 au 17 novembre 2023

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative) sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de ***l'ensemble*** du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 2 : Fonctions réelles (Tout le chapitre)

Chapitre 3 : Équations différentielles

1. Primitives et intégrales
   Intégration par parties (pas de changement de variables qui sera vu ultérieurement)
2. Fonctions à valeurs complexes
   2.1. Continuité, dérivabilité
   2.2. Primitives
3. Équations différentielles linéaires du premier ordre
   3.1. Équations homogènes
   3.2. Équations avec second membre
4. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants
   4.1. Équations homogènes
   4.2. Équations avec second membre
   Second membre uniquement de la forme $P(x)\mathrm{e}^{kx}$, $P(x)\cos(kx)$, $P(x)\sin(kx)$, $P(x)\mathrm{sh}(kx)$, $P(x)\mathrm{ch}(kx)$ *où* P *est un polynôme.*

Primitives usuelles

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur !**

Questions de cours :

Q1. Énoncé et démonstration « *Stricte monotonie et injectivité* ».

Théorème *Stricte monotonie et injectivité*

Soient E une partie de $\mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est strictement monotone sur E, alors f est injective.

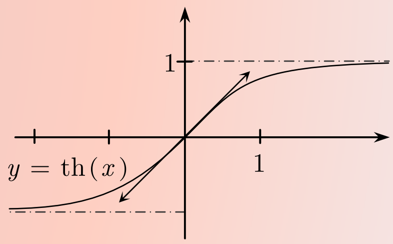
Q2. Énoncé « *Dérivée et représentation graphique de la fonction th* » et démonstration de la dérivée et des asymptotes.

Théorème *Dérivée et représentation graphique de la fonction th*

- La fonction tangente hyperbolique est définie et dérivable (donc continue) et impaire sur $\mathbb{R}$. On a, pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}.$$

- La droite d'équation $y = 1$ (resp. $y = -1$) est asymptote à la courbe représentative de la fonction tangente hyperbolique en $+\infty$ (resp. $-\infty$).



Q3. Énoncé et démonstration « *La formule d'intégration par parties* ».

Théorème *La formule d'intégration par parties*

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs dérivées u' et v' sont continues sur I, alors, pour tout $(a,b) \in I^2$:

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Q4. Énoncé et démonstration « *Dérivée des fonctions de la forme* $x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ ».

Théorème *Dérivée des fonctions de la forme* $x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$

Soient I un intervalle, $u : I \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction dérivable, alors la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$$

Q5. Énoncé et démonstration « *Problème de Cauchy pour* $y' + a(x)y = b(x)$ ».

Théorème *Problème de Cauchy pour* $y' + a(x)y = b(x)$

Soient I un intervalle, $a,b \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$, A une primitive de a sur I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (y(x_0) = y_0 \text{ est appelée } \textit{condition initiale})$$

Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 2 : Calculs algébriques

Tout le chapitre est au programme (pas de systèmes dans ce chapitre cette année)

Chapitre 3 : Nombres complexes

Tout le chapitre est au programme

1 Introduction

2 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

3 Conjugué et opérations

4 Plan complexe

5 Module et argument

5.1 Forme trigonométrique ou forme polaire

5.2 Formules de trigonométrie

5.3 Propriétés du module et de l'argument

6 Notation exponentielle

7 Résolution d'équations $az^2 + bz + c = 0$

7.1 Racines carrées d'un complexe

7.2 Résolution des équations du second degré à coefficients complexes

Fiche méthode 3 : exercices et leçon

$\boxed{\text{Questions de cours}}$

Q1 : Énoncé et démonstration de la formule $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$

Q2 : Énoncé et démonstration de la formule du binôme de Newton.

Q3 : Énoncé de toutes les formules de la propriété du paragraphe « Résultats classiques » du chapitre 2.

Q4 : Énoncé de « Propriétés du conjugué » et démonstration des points 4 et 6.

Propriété 1
$\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \overline{z} = z$
3. $z \in i\mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \overline{z} = -z$
4. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z}'$
5. $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$
6. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z}'$
7. $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z}'}$, $\quad z' \neq 0$
8. $\overline{z^n} = (\overline{z})^n, \quad z \neq 0$

Q5 : Énoncé de « Propriétés du module et de l'argument » et démonstration du point 3.

Propriété 2
Soit $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$.

1. $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$.
2. $|z| \geqslant 0$
3. $|zz'| = |z| \times |z'|$.
   $\arg(zz') = \arg z + \arg z'[2\pi]$.
4. $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$. $z \neq 0$
   $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg z[2\pi]$.
5. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$. $z' \neq 0$
   $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'[2\pi]$.
6. pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|z^n| = |z|^n$
   $\arg z^n = n \arg z[2\pi]$.
7. $|z| = |-z|$ et $\arg(-z) = \arg z + \pi[2\pi]$
8. $|\bar{z}| = |z|$ et $\arg \bar{z} = -\arg z[2\pi]$.

Q6 : Définition de l'ensemble $\mathbb{U}$:

Définition 1
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, $\boxed{\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}}$.

Pour tout $z \in \mathbb{U}$, l'image de z est appartient au cercle de centre O et de rayon 1, que l'on appelle le **cercle trigonométrique**.