

Programme de Colle 8

Semaine 48 – du 27 novembre au 1^{er} décembre 2023

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative) sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de *l'ensemble* du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 2 : Fonctions réelles (Tout le chapitre)

Chapitre 3 : Équations différentielles

1. Primitives et intégrales

Intégration par parties (pas de changement de variables qui sera vu ultérieurement)

2. Fonctions à valeurs complexes

2.1. Continuité, dérivabilité

2.2. Primitives

3. Équations différentielles linéaires du premier ordre

3.1. Équations homogènes

3.2. Équations avec second membre

4. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

4.1. Équations homogènes

4.2. Équations avec second membre

Second membre uniquement de la forme $P(x)e^{kx}$, $P(x)\cos(kx)$, $P(x)\sin(kx)$,

$P(x)\operatorname{sh}(kx)$, $P(x)\operatorname{ch}(kx)$ où P est un polynôme.

Primitives usuelles

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur** !

Questions de cours :

Q1. Énoncé et démonstration « *Stricte monotonie et injectivité* ».



Théorème *Stricte monotonie et injectivité*

Soient E une partie de \mathbb{R} , $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est strictement monotone sur E , alors f est injective.

Q2. Énoncé « *Dérivée et représentation graphique de la fonction th* » et démonstration de la dérivée et des asymptotes.

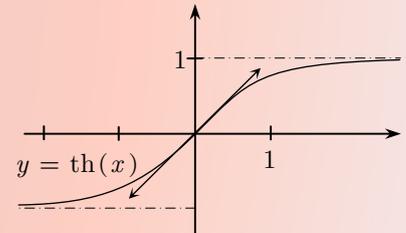


Théorème *Dérivée et représentation graphique de la fonction th*

- La fonction tangente hyperbolique est définie et dérivable (donc continue) et impaire sur \mathbb{R} . On a, pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}.$$

- La droite d'équation $y = 1$ (resp. $y = -1$) est asymptote à la courbe représentative de la fonction tangente hyperbolique en $+\infty$ (resp. $-\infty$).



Q3. Énoncé et démonstration « *La formule d'intégration par parties* ».



Théorème *La formule d'intégration par parties*

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs dérivées u' et v' sont continues sur I , alors, pour tout $(a, b) \in I^2$:

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

Q4. Énoncé et démonstration « *Dérivée des fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$* ».



Théorème *Dérivée des fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$*

Soient I un intervalle, $u : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable, alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

Q5. Énoncé et démonstration « *Problème de Cauchy pour $y' + a(x)y = b(x)$* ».



Théorème *Problème de Cauchy pour $y' + a(x)y = b(x)$*

Soient I un intervalle, $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, A une primitive de a sur I , $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (y(x_0) = y_0 \text{ est appelée condition initiale})$$

Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 4 : Systèmes linéaires d'équations

Savoir résoudre un système avec la méthode du pivot de Gauss.

Chapitre 5 : Applications et relations binaires

1 Définitions

2 Image et image réciproque d'une partie

3 Injections, surjections, bijections

4 Relations binaires

4.1 Définition

4.2 Relations d'équivalences

L'ensemble quotient a été vu uniquement en exercice.

Le fait qu'il constitue une partition de E aussi.

Questions de cours

Q1 : Soit f une applications de E dans F .

Définition de l'**image** $f(A)$ d'une partie A de E par f et

définition de l'**image réciproque** $f^{-1}(A)$ d'une partie A de F par f .

Q2 : Définition d'une application **injective**,

définition d'une application **surjective**

et définition d'une application **bijective**.

Q3 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 1

Soit f une applications de E dans F et g une application de F dans G .

Si f et g sont deux fonctions bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Q4 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 2

Soit $f : E \mapsto F$. Si E et F sont des ensembles **finis de même cardinal** alors :

f est bijective $\Leftrightarrow f$ est injective $\Leftrightarrow f$ est surjective.

Q5 : Énoncé de :

Définition 1

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur un ensemble E non vide.

- \mathcal{R} est dite **réflexive** si : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
- \mathcal{R} est dite **symétrique** si : $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
- \mathcal{R} est dite **transitive** si : $\forall (x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
- \mathcal{R} est dite **antisymétrique** si : $\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.