Année 2023-2024
Promo 31 – 1ère Année

Programme de Colle 9
Semaine 49 – du 4 au 8 décembre 2023

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative) sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de ***l'ensemble*** du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes …) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 2 : Fonctions réelles (Tout le chapitre)

Chapitre 3 : Équations différentielles

1. Primitives et intégrales

   Intégration par parties (pas de changement de variables qui sera vu ultérieurement)

2. Fonctions à valeurs complexes

   2.1. Continuité, dérivabilité

   2.2. Primitives

3. Équations différentielles linéaires du premier ordre

   3.1. Équations homogènes

   3.2. Équations avec second membre

4. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

   4.1. Équations homogènes

   4.2. Équations avec second membre

   Second membre uniquement de la forme $P(x)\mathrm{e}^{kx}$, $P(x)\cos(kx)$, $P(x)\sin(kx)$, $P(x)\operatorname{sh}(kx)$, $P(x)\operatorname{ch}(kx)$ *où* P *est un polynôme.*

Primitives usuelles

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur !**

Questions de cours :

Q1. Énoncé et démonstration « *Stricte monotonie et injectivité* ».

Théorème — *Stricte monotonie et injectivité*

Soient E une partie de $\mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est strictement monotone sur E, alors f est injective.

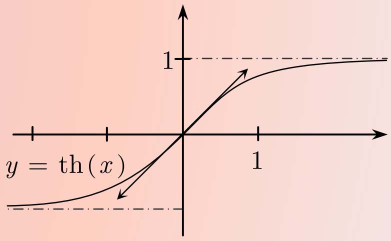
Q2. Énoncé « *Dérivée et représentation graphique de la fonction th* » et démonstration de la dérivée et des asymptotes.

Théorème — *Dérivée et représentation graphique de la fonction th*

- La fonction tangente hyperbolique est définie et dérivable (donc continue) et impaire sur $\mathbb{R}$. On a, pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}.$$

- La droite d'équation $y = 1$ (resp. $y = -1$) est asymptote à la courbe représentative de la fonction tangente hyperbolique en $+\infty$ (resp. $-\infty$).



Q3. Énoncé et démonstration « *La formule d'intégration par parties* ».

Théorème — *La formule d'intégration par parties*

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs dérivées u' et v' sont continues sur I, alors, pour tout $(a,b) \in I^2$:

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Q4. Énoncé et démonstration « *Dérivée des fonctions de la forme* $x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ ».

Théorème — *Dérivée des fonctions de la forme* $x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$

Soient I un intervalle, $u : I \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction dérivable, alors la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$$

Q5. Énoncé et démonstration « *Problème de Cauchy pour* $y' + a(x)y = b(x)$ ».

Théorème — *Problème de Cauchy pour* $y' + a(x)y = b(x)$

Soient I un intervalle, $a,b \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$, A une primitive de a sur I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (y(x_0) = y_0 \text{ est appelée } \textit{condition initiale})$$

Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 5 : Applications et relations binaires

1 Définitions

2 Image et image réciproque d'une partie

3 Injections, surjections, bijections

4 Relations binaires

4.1 Définition

4.2 Relations d'équivalences

L'ensemble quotient a été vu uniquement en exercice.
Le fait qu'il constitue une partition de E aussi.

Chapitre 6 : Nombres complexes partie 2

Tout le chapitre est au programme

5 Calculs de sommes

$(1+e^{i\theta})$, $(1-e^{i\theta})$, $e^{i\alpha}+e^{i\beta}$, $e^{i\alpha}-e^{i\beta}$

6 Expression de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$

7 Linéarisation de $\cos^p(\theta)$ et $\sin^p(\theta)$

8 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

8.1 Racines n-ièmes de 1

Exemple à retenir : racines cubiques de 1, définition du nombre j.

8.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul

Questions de cours page suivante

Questions de cours

Q1 : Soit f une applications de E dans F.
Définition de l'**image** $f(A)$ **d'une partie** A de E par f et
définition de l'**image réciproque** $f^{-1}(A)$ **d'une partie** A de F par f.

Q2 : Définition d'une application **injective**,
définition d'une application **surjective**
et définition d'une application **bijective**.

Q3 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 1
Soit $f : E \mapsto F$. Si E et F sont des ensembles **finis de même cardinal** alors :
f est bijective $\Leftrightarrow$ f est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective.

Q4 : Énoncé de :

Définition 1
Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur un ensemble E non vide.

- $\mathscr{R}$ est dite **réflexive** si : $\forall x \in E, \quad x\mathscr{R}x.$
- $\mathscr{R}$ est dite **symétrique** si : $\forall (x,y) \in E^2, \quad x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x.$
- $\mathscr{R}$ est dite **transitive** si : $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z) \quad \Rightarrow \quad x\mathscr{R}z.$
- $\mathscr{R}$ est dite **antisymétrique** si : $\forall (x,y) \in E^2, \quad (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x) \quad \Rightarrow \quad x = y.$

Q5 : Énoncé de

Propriété 1
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$.
Il existe n racines n-ièmes complexes de 1, ce sont les nombres de la forme $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in \{0, 1, .., n-1\}$.
On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ième de l'unité. $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$.
$\mathbb{U}_n = \left\{ \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k, k \in [|0, n-1|] \right\} = \{w_1^k,\ k \in [|0, n-1|]\}$.

Q6 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 2
La somme des racines n-ièmes de 1 est égale à 0.
Les racines n-ièmes de 1 différentes de 1 sont les solutions de l'équation $1 + z + z^2 + .. + z^{n-1} = 0$.