Programme en Analyse du Devoir Surveillé 1
Samedi 19 octobre 2024

Chapitre 1 - Nombres réels

Chapitre 2 - Fonctions réelles

Vous aurez au moins une question de cours parmi les suivantes :

Q1. Démonstration de $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Q2. Énoncé et démonstration « *Stabilité des rationnels* ».

Théorème *Stabilité des rationnels*

✓ $\mathbb{Q}$ est stable pour l'addition :

$$\forall x, y \in \mathbb{Q},\ \ x + y \in \mathbb{Q}.$$

✓ $\mathbb{Q}$ est stable pour le produit :

$$\forall x, y \in \mathbb{Q},\ \ xy \in \mathbb{Q}.$$

✓ $\mathbb{Q}$ est stable pour le quotient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*,\ \ \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}.$$

Q3. Énoncé et démonstration « *Unicité du plus grand et du plus petit élément* ».

Théorème *Unicité du plus grand et du plus petit élément*

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
Si A possède un plus grand (resp. petit) élément, alors celui-ci est **unique** et on l'appelle donc **le** plus grand (resp. petit) élément de A.
On le note $\max A$ (resp. $\min A$).

Q4. Énoncé et démonstration « *Plus petit élément et partie de* $\mathbb{N}$ ».

Théorème *Plus petit élément et partie de* $\mathbb{N}$

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

Q5. Énoncé et démonstration « *Plus grand élément et partie de* $\mathbb{N}$ ».

Théorème *Plus grand élément et partie de* $\mathbb{N}$

Toute partie non vide **majorée** de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Q6. Énoncé et démonstration « *Lien entre les plus grands/petits éléments et les bornes supérieures/inférieures* ».

Théorème *Lien entre les plus grands/petits éléments et les bornes supérieures/inférieures*

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
Si A possède un plus grand (resp. petit) élément, alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure) et on a :

$$\sup A = \max A \qquad (\text{resp. } \inf A = \min A)$$

Q7. Énoncé « *Caractérisation des intervalles* » et démonstration dans les cas d'un intervalle non minoré et majoré.

Théorème *Caractérisation des intervalles*

Si I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $a,b \in \mathbb{R}$, avec $a \leqslant b$, alors on a :

- Soit $I = \mathbb{R}$,
- Soit $I = [a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$, ou $I =]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$.
- Soit $I =]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$, ou $I =]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$.
- Soit $I = [a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ (intervalle fermé ou *segment*).
  ou $I =]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ (intervalle semi-ouvert à gauche).
  ou $I = [a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ (intervalle semi-ouvert à droite).
  ou $I =]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervalle ouvert).

Q8. Énoncé et démonstration « *Inégalité triangulaire* ».

Théorème *Inégalité triangulaire*

Soient $x,y \in \mathbb{R}$:

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, x et y sont de même signe.

Q9. Énoncé et démonstration « *Inégalité triangulaire inverse* ».

Théorème *Inégalité triangulaire inverse*

Soient $x,y \in \mathbb{R}$:

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x+y|.$$

Q10. Énoncé et démonstration « *Propriétés sur les distances* ».

Théorème *Propriétés sur les distances*

Soient $x,y,z \in \mathbb{R}$:

(i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$.
(ii) $d(x,y) = d(y,x)$.
(iii) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ *(inégalité triangulaire)*.

Q11. Énoncé et démonstration « $\mathbb{R}$ *est archimédien* ».

Théorème $\mathbb{R}$ *est archimédien*

L'ensemble $\mathbb{R}$ est *archimédien*, *i.e.* : $\forall x,y \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, x < ny$.

Q12. Énoncé et démonstration « *Densité des rationnels et des irrationnels* ».

Théorème *Densité des rationnels et des irrationnels*

(i) Tout intervalle non vide et non réduit à un singleton contient au moins un rationnel.
On dit que $\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$.

(ii) Tout intervalle non vide et non réduit à un singleton contient au moins un irrationnel.
On dit que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$.

Q13. Énoncé et démonstration « *Fonction bornée et valeur absolue* ».

Théorème *Fonction bornée et valeur absolue*

Soient E un ensemble inclus dans $\mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on a équivalence entre :

(i) f est bornée.

(ii) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \ |f(x)| \leqslant M$.

(iii) $|f|$ est majorée.

Q14. Énoncé et démonstration « *Stricte monotonie et injectivité* ».

Théorème *Stricte monotonie et injectivité*

Soient E une partie de $\mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
Si f est strictement monotone sur E, alors f est injective.

Q15. Énoncé « *Théorème de la bijection* ».

Théorème *Théorème de la bijection (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue et strictement monotone.

Alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $f\left([a, b]\right)$, et de plus :

- si f est croissante : $f\left([a, b]\right) = [f(a), f(b)]$
- si f est décroissante : $f\left([a, b]\right) = [f(b), f(a)]$

Si f est définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, on a un résultat analogue avec éventuellement des limites. Par exemple, si f est définie sur $]a, b]$ et croissante : $f\left(]a, b]\right) = \left]\lim_{a^+} f, f(b)\right]$

Q16. Énoncé « *Propriétés de la fonction logarithme népérien* » et démonstration de **(iii)**.

Théorème *Propriétés de la fonction logarithme népérien*

(i) $\ln(1) = 0$

(ii) La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$$

donc ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

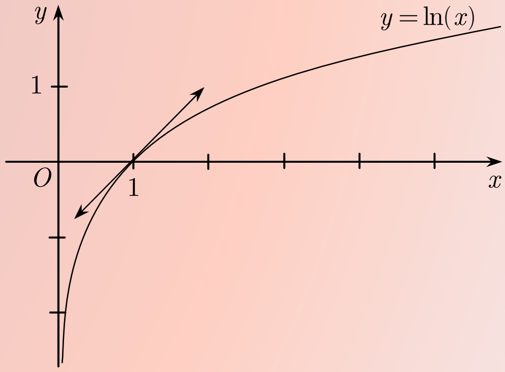
(iii) $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

(iv) $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b), \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

(v) $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(a^n) = n\ln(a)$.

$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$

(vi) $\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty, \quad \ln(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.



Q17. Énoncé de la définition « *Fonction réciproque* ».

Définition *Fonction réciproque*

Soient E et F des parties de $\mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow F$ une fonction.

On appelle fonction réciproque de f, toute fonction $g : F \longrightarrow E$ qui vérifie :

$$f \circ g = \mathrm{Id}_F \text{ et } g \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

Q18. Énoncé « *Bijection réciproque* ».

Théorème *Bijection réciproque*

Soient E et F des parties de $\mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow F$ une fonction.

f est bijective de E sur F si et seulement si f possède une fonction réciproque.

Dans ce cas, cette fonction réciproque est unique, et est notée f^{-1}. De plus, avec $x \in E$ et $y \in F$:

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x.$$

Q19. Énoncé « *Théorème de continuité, de dérivabilité d'une fonction réciproque* ».

Théorème *Théorème de continuité, de dérivabilité d'une fonction réciproque*

Soient I et J deux intervalles et $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective de I sur J (on a donc $J = f(I)$).

- **Théorème de continuité d'une fonction réciproque :**

  Si f est continue sur I, alors f^{-1} est continue sur J.

- **Théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque :** Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et : $\forall x \in J, \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$.

Q20. Énoncé de la définition « *Fonction lipschitzienne* ».

Définition *Fonction lipschitzienne*

Soient E une partie de $\mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $k \in \mathbb{R}_+$.

On dit que f est une fonction k-lipschitzienne si :

$$\forall x,y \in E, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

On dit que f est lipschitzienne, s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit k-lipschitzienne.

Q21. Énoncé et démonstration « *Propriétés algébriques des fonctions puissances quelconques* ».

Théorème *Propriétés algébriques*

(i) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour $n \in \mathbb{N}$ les définitions de x^n avec les puissances entières et avec les puissances quelconques coïncident.

(ii) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\ln(x^a) = a\ln(x),\quad x^{a+b} = x^a x^b,\quad x^{ab} = (x^a)^b,\quad (xy)^a = x^a y^a,\quad x^{-a} = \frac{1}{x^a} = \left(\frac{1}{x}\right)^a.$$

Q22. Énoncé « *Croissances comparées des fonctions logarithme, exponentielle et puissances* » et démonstration de **(i)**.

Théorème *Croissances comparées des fonctions logarithme, exponentielle et puissances*

(i) Comparaison exponentielle/puissances :

$$\text{Soit } \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x} = 0\,.$$

(ii) Comparaison puissances/logarithme :

$$\text{Soient } \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*,\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} x^\alpha\,(|\ln x|)^\beta = 0\,.$$

(iii) Comparaison exponentielle/logarithme :

$$\text{Soit } \beta \in \mathbb{R}_+^*,\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{(\ln x)^\beta} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^\beta\,\mathrm{e}^{-x} = 0\,.$$

Q23. Énoncé « *Formules d'addition, de linéarisation, transformation de sommes en produits* ».

Théorème *Formules d'addition, de linéarisation, transformation de sommes en produits*

- **Formules d'addition :**

$$\forall a,b \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \\ \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) & \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \end{cases}$$

- **Formules de linéarisation :**

$$\forall a,b \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} \sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big) \\ \sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\big) \\ \cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\big) \end{cases}$$

- **Transformation de sommes en produits :**

$$\forall p,q \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} \sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right) & \cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right) \\ \sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right) & \cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right) \end{cases}$$

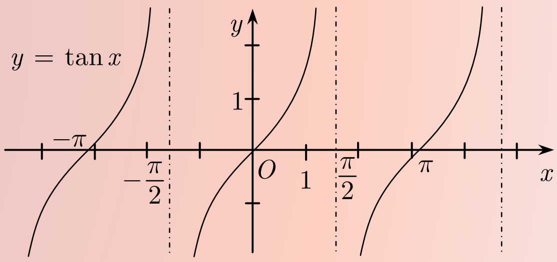
Q24. Énoncé et démonstration « *Fonction tangente* ».

Théorème *Fonction tangente*

La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

Elle est dérivable sur son ensemble de définition, π-périodique et impaire. On a :

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$$



Q25. Énoncé et démonstration « *Formules d'addition, de duplications, expressions en fonction de* $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ ».

Théorème — *Formules d'addition, de duplications, expressions en fonction de* $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Les formules suivantes sont vraies pour toutes les valeurs pour lesquelles chaque terme est bien défini.

- **Formules d'addition :**

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

- **Formules de duplication :**

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

- **Expressions en fonction de** $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$**:** Si on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Q26. Énoncé et démonstration « *Dérivée et représentation graphique des fonctions Arccos et Arcsin* ».

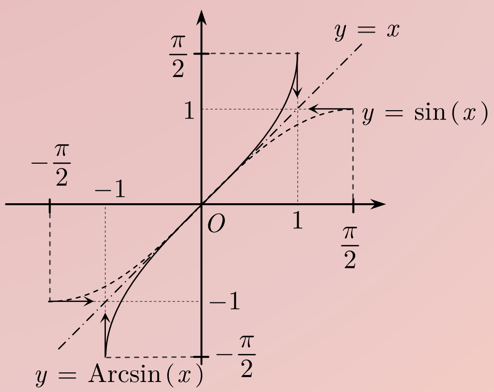
Théorème — *Dérivée et représentation graphique des fonctions Arccos et Arcsin*

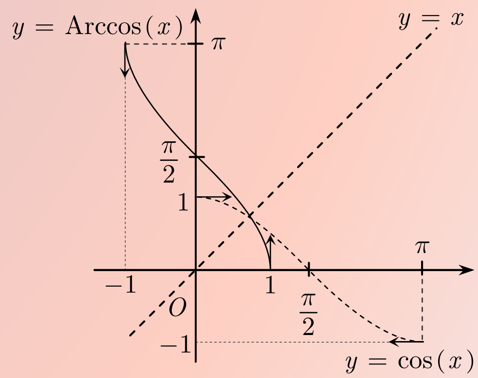
- La fonction Arcsin est définie et continue sur $[-1;1]$ et impaire, **mais** elle n'est dérivable que sur $]-1;1[$:

$$\forall x \in\,]-1;1[, \quad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- La fonction Arccos est définie et continue sur $[-1;1]$, **mais** elle n'est dérivable que sur $]-1;1[$:

$$\forall x \in\,]-1;1[, \quad \text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$





Q27. Énoncé et démonstration « *Dérivée et représentation graphique de la fonction th* ».

Théorème — *Dérivée et représentation graphique de la fonction th*

- La fonction tangente hyperbolique est définie et dérivable (donc continue) et impaire sur $\mathbb{R}$. On a, pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}.$$

- La droite d'équation $y = 1$ (resp. $y = -1$) est asymptote à la courbe représentative de la fonction tangente hyperbolique en $+\infty$ (resp. $-\infty$).