Année 2024-2025
Promo 32 – 1ère Année

Programme en Analyse du Devoir Surveillé 2
Samedi 7 décembre 2024

Chapitre 1 - Nombres réels

Chapitre 2 - Fonctions réelles

Chapitre 3 - Equations différentielles

Chapitre 4 - Les suites numériques

Vous aurez au moins une question de cours parmi les suivantes :

Q1. Démonstration de $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Q2. Énoncé et démonstration « *Stabilité des rationnels* ».

Théorème *Stabilité des rationnels*

- ✓ $\mathbb{Q}$ est stable pour l'addition :
$$\forall x, y \in \mathbb{Q},\ \ x + y \in \mathbb{Q}.$$
- ✓ $\mathbb{Q}$ est stable pour le produit :
$$\forall x, y \in \mathbb{Q},\ \ xy \in \mathbb{Q}.$$
- ✓ $\mathbb{Q}$ est stable pour le quotient :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*,\ \ \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}.$$

Q3. Énoncé et démonstration « *Unicité du plus grand et du plus petit élément* ».

Théorème *Unicité du plus grand et du plus petit élément*

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
Si A possède un plus grand (resp. petit) élément, alors celui-ci est **unique** et on l'appelle donc **le** plus grand (resp. petit) élément de A.
On le note $\max A$ (resp. $\min A$).

Q4. Énoncé et démonstration « *Plus petit élément et partie de* $\mathbb{N}$ ».

Théorème *Plus petit élément et partie de* $\mathbb{N}$

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

Q5. Énoncé et démonstration « *Plus grand élément et partie de* $\mathbb{N}$ ».

Théorème *Plus grand élément et partie de* $\mathbb{N}$

Toute partie non vide **majorée** de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Q6. Énoncé et démonstration « *Lien entre les plus grands/petits éléments et les bornes supérieures/inférieures* ».

Théorème *Lien entre les plus grands/petits éléments et les bornes supérieures/inférieures*

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
Si A possède un plus grand (resp. petit) élément, alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure) et on a :

$$\sup A = \max A \qquad (\text{resp. } \inf A = \min A)$$

Q7. Énoncé « *Caractérisation des intervalles* » et démonstration dans les cas d'un intervalle non minoré et majoré.

Théorème *Caractérisation des intervalles*

Si I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $a,b \in \mathbb{R}$, avec $a \leqslant b$, alors on a :

- Soit $I = \mathbb{R}$,
- Soit $I = \left[a,+\infty\right[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\right\}$, ou $I = \left]a,+\infty\right[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\right\}$.
- Soit $I = \left]-\infty,b\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\right\}$, ou $I = \left]-\infty,b\right[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\right\}$.
- Soit $I = \left[a,b\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\right\}$ (intervalle fermé ou *segment*).
  ou $I = \left]a,b\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\right\}$ (intervalle semi-ouvert à gauche).
  ou $I = \left[a,b\right[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\right\}$ (intervalle semi-ouvert à droite).
  ou $I = \left]a,b\right[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\right\}$ (intervalle ouvert).

Q8. Énoncé et démonstration « *Inégalité triangulaire* ».

Théorème *Inégalité triangulaire*

Soient $x,y \in \mathbb{R}$:

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, x et y sont de même signe.

Q9. Énoncé et démonstration « *Inégalité triangulaire inverse* ».

Théorème *Inégalité triangulaire inverse*

Soient $x,y \in \mathbb{R}$:

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x+y|.$$

Q10. Énoncé et démonstration « *Propriétés sur les distances* ».

Théorème *Propriétés sur les distances*

Soient $x,y,z \in \mathbb{R}$:

(i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$.
(ii) $d(x,y) = d(y,x)$.
(iii) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ *(inégalité triangulaire)*.

Q11. Énoncé et démonstration « $\mathbb{R}$ *est archimédien* ».

Théorème $\mathbb{R}$ *est archimédien*

L'ensemble $\mathbb{R}$ est *archimédien*, *i.e.* : $\forall x,y \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n \in \mathbb{N},\ x < ny$.

Q12. Énoncé et démonstration « *Densité des rationnels et des irrationnels* ».

Théorème *Densité des rationnels et des irrationnels*

(i) Tout intervalle non vide et non réduit à un singleton contient au moins un rationnel.
On dit que $\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$.

(ii) Tout intervalle non vide et non réduit à un singleton contient au moins un irrationnel.
On dit que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$.

Q13. Énoncé et démonstration « *Fonction bornée et valeur absolue* ».

Théorème *Fonction bornée et valeur absolue*

Soient E un ensemble inclus dans $\mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on a équivalence entre :

(i) f est bornée.

(ii) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \ |f(x)| \leqslant M$.

(iii) $|f|$ est majorée.

Q14. Énoncé et démonstration « *Stricte monotonie et injectivité* ».

Théorème *Stricte monotonie et injectivité*

Soient E une partie de $\mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
Si f est strictement monotone sur E, alors f est injective.

Q15. Énoncé « *Théorème de la bijection* ».

Théorème *Théorème de la bijection (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue et strictement monotone.

Alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $f\big([a, b]\big)$, et de plus :

- si f est croissante : $f\big([a, b]\big) = \big[f(a), f(b)\big]$
- si f est décroissante : $f\big([a, b]\big) = \big[f(b), f(a)\big]$

Si f est définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, on a un résultat analogue avec éventuellement des limites. Par exemple, si f est définie sur $]a, b]$ et croissante : $f\big(]a, b]\big) = \big]\lim\limits_{a^+} f, f(b)\big]$

Q16. Énoncé « *Propriétés de la fonction logarithme népérien* » et démonstration de **(iii)** .

Théorème *Propriétés de la fonction logarithme népérien*

(i) $\ln(1) = 0$

(ii) La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$$

donc ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

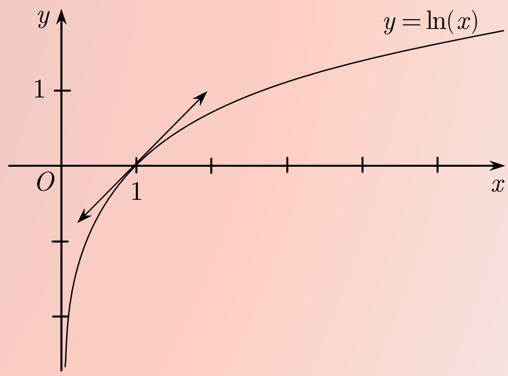
(iii) $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

(iv) $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b), \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

(v) $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(a^n) = n\ln(a).$

$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$

(vi) $\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty, \quad \ln(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$



Q17. Énoncé de la définition « *Fonction réciproque* ».

Définition *Fonction réciproque*

Soient E et F des parties de $\mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow F$ une fonction.

On appelle fonction réciproque de f, toute fonction $g : F \longrightarrow E$ qui vérifie :

$$f \circ g = \mathrm{Id}_F \text{ et } g \circ f = \mathrm{Id}_E .$$

Q18. Énoncé « *Bijection réciproque* ».

Théorème *Bijection réciproque*

Soient E et F des parties de $\mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow F$ une fonction.

f est bijective de E sur F si et seulement si f possède une fonction réciproque.

Dans ce cas, cette fonction réciproque est unique, et est notée f^{-1}. De plus, avec $x \in E$ et $y \in F$:

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x.$$

Q19. Énoncé « *Théorème de continuité, de dérivabilité d'une fonction réciproque* ».

Théorème *Théorème de continuité, de dérivabilité d'une fonction réciproque*

Soient I et J deux intervalles et $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective de I sur J (on a donc $J = f(I)$).

- **Théorème de continuité d'une fonction réciproque :**

  Si f est continue sur I, alors f^{-1} est continue sur J.

- **Théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque :** Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et : $\forall x \in J, \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$.

Q20. Énoncé de la définition « *Fonction lipschitzienne* ».

Définition *Fonction lipschitzienne*

Soient E une partie de $\mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $k \in \mathbb{R}_+$.

On dit que f est une fonction k-lipschitzienne si :

$$\forall x,y \in E, \ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

On dit que f est lipschitzienne, s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit k-lipschitzienne.

Q21. Énoncé et démonstration « *Propriétés algébriques des fonctions puissances quelconques* ».

Théorème *Propriétés algébriques*

(i) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour $n \in \mathbb{N}$ les définitions de x^n avec les puissances entières et avec les puissances quelconques coïncident.

(ii) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\ln(x^a) = a\ln(x),\quad x^{a+b} = x^a x^b,\quad x^{ab} = (x^a)^b,\quad (xy)^a = x^a y^a,\quad x^{-a} = \frac{1}{x^a} = \left(\frac{1}{x}\right)^a.$$

Q22. Énoncé « *Croissances comparées des fonctions logarithme, exponentielle et puissances* » et démonstration de **(i)**.

Théorème *Croissances comparées des fonctions logarithme, exponentielle et puissances*

(i) Comparaison exponentielle/puissances :

$$\text{Soit } \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0.$$

(ii) Comparaison puissances/logarithme :

$$\text{Soient } \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*,\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} x^\alpha (|\ln x|)^\beta = 0.$$

(iii) Comparaison exponentielle/logarithme :

$$\text{Soit } \beta \in \mathbb{R}_+^*,\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{(\ln x)^\beta} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^\beta e^{-x} = 0.$$

Q23. Énoncé « *Formules d'addition, de linéarisation, transformation de sommes en produits* ».

Théorème *Formules d'addition, de linéarisation, transformation de sommes en produits*

- **Formules d'addition :**

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \\ \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) & \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \end{cases}$$

- **Formules de linéarisation :**

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big) \\ \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\big) \\ \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\big) \end{cases}$$

- **Transformation de sommes en produits :**

$$\forall p, q \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} \sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) & \cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \\ \sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) & \cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \end{cases}$$

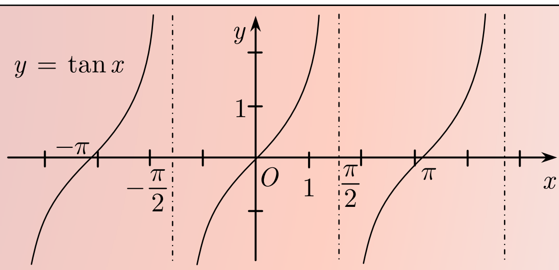
Q24. Énoncé et démonstration « *Fonction tangente* ».

Théorème *Fonction tangente*

La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

Elle est dérivable sur son ensemble de définition, π-périodique et impaire. On a :

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$$



Q25. Énoncé et démonstration « *Formules d'addition, de duplications, expressions en fonction de* $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ ».

Théorème *Formules d'addition, de duplications, expressions en fonction de* $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Les formules suivantes sont vraies pour toutes les valeurs pour lesquelles chaque terme est bien défini.

- **Formules d'addition :**

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

- **Formules de duplication :**

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

- **Expressions en fonction de** $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$**:** Si on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Q26. Énoncé et démonstration « *Dérivée et représentation graphique des fonctions Arccos et Arcsin* ».

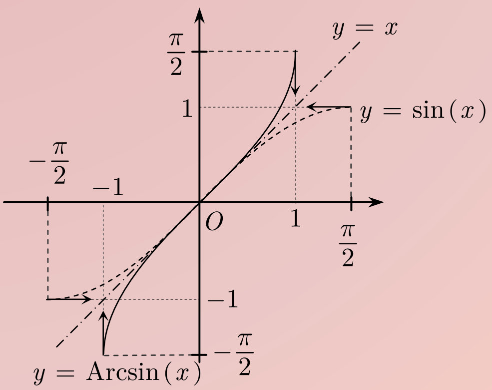
Théorème *Dérivée et représentation graphique des fonctions Arccos et Arcsin*

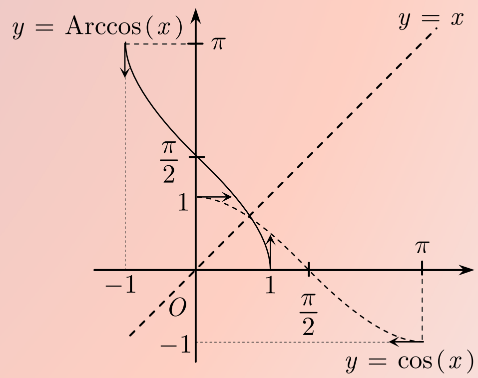
- La fonction Arcsin est définie et continue sur $[-1;1]$ et impaire, **mais** elle n'est dérivable que sur $]-1;1[$:

$$\forall x \in \,]-1;1[, \quad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- La fonction Arccos est définie et continue sur $[-1;1]$, **mais** elle n'est dérivable que sur $]-1;1[$:

$$\forall x \in \,]-1;1[, \quad \text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$





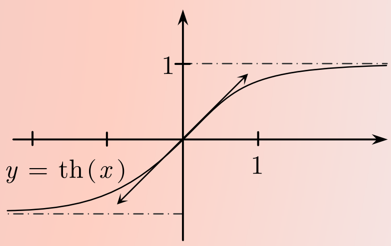
Q27. Énoncé et démonstration « *Dérivée et représentation graphique de la fonction th* ».

Théorème *Dérivée et représentation graphique de la fonction th*

- La fonction tangente hyperbolique est définie et dérivable (donc continue) et impaire sur $\mathbb{R}$. On a, pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}.$$

- La droite d'équation $y = 1$ (resp. $y = -1$) est asymptote à la courbe représentative de la fonction tangente hyperbolique en $+\infty$ (resp. $-\infty$).



Q28. Énoncé « *Intégrale et primitive* ».

Théorème — *Intégrale et primitive*

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle I, si a et b sont deux éléments de I et si F désigne une primitive de f sur I, alors l'intégrale de f de a à b est :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Q29. Énoncé et démonstration « *La formule d'intégration par parties* ».

Théorème — *La formule d'intégration par parties*

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs dérivées u' et v' soient continues sur I, alors, pour tout $(a,b) \in I^2$:

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q30. Énoncé de la définition « *Fonction continue/dérivable à valeurs complexes* ».

Définition — *Fonction continue/dérivable à valeurs complexes*

Soient I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

On dit que f est *continue* sur I (resp. *dérivable* sur I) si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ (à valeurs réelles) le sont.

En cas de dérivabilité, la fonction $x \longmapsto \mathrm{Re}(f)'(x) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f)'(x)$ est appelée la *dérivée* de f sur I et noté f'.

L'ensemble des fonctions continues (resp. dérivables) sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ est noté $\mathcal{C}(I,\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{D}(I,\mathbb{C})$)

Q31. Énoncé et démonstration « *Dérivée des fonctions de la forme* $x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ ».

Théorème — *Dérivée des fonctions de la forme* $x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$

Soient I un intervalle, $u : I \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction dérivable, alors la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I,\ \ f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}.$$

Q32. Énoncé de la définition « *Intégrale sur un segment d'une fonction à valeurs complexes* ».

Définition — *Intégrale sur un segment d'une fonction à valeurs complexes*

Soient $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$.

On appelle *intégrale* de f sur $[a,b]$ le nombre complexe $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)\,\mathrm{d}t$ noté $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Q33. Énoncé et démonstration « *Équation différentielle* $y' + a(x)y = 0$ ».

Théorème — *Équation différentielle* $y' + a(x)y = 0$

Soient I un intervalle, $a \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$, A une primitive de a sur I et $y \in \mathcal{D}(I,\mathbb{K})$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $y' + ay = 0$ sur I (ii) $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ y = \lambda \mathrm{e}^{-A}$ sur I

Q34. Énoncé et démonstration « *Problème de Cauchy pour* $y' + a(x)y = 0$ ».

Théorème *Problème de Cauchy pour* $y' + a(x)y = 0$

Soient $a \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$, $y \in \mathcal{D}(I,\mathbb{K})$, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

On appelle *problème de Cauchy* le système :

$$\begin{cases} y' + ay = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (y(x_0) = y_0 \text{ est appelée } \textit{condition initiale})$$

alors la valeur de la constante λ est unique, ainsi le problème de Cauchy possède une et une seule solution.

Q35. Énoncé et démonstration « *Solution générale et particulière de* $y' + a(x)y = b(x)$ ».

Théorème *Solution générale et particulière de* $y' + a(x)y = b(x)$

Soient $a,b \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$, A une primitive de a sur I,

y_p une solution fixée de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ sur I dite *solution particulière.*

Soit en outre $y \in \mathcal{D}(I,\mathbb{K})$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $y' + ay = b$ sur I (ii) $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ y = y_p + \lambda e^{-A}$ sur I

Q36. Énoncé et démonstration « *Problème de Cauchy pour* $y' + a(x)y = b(x)$ ».

Théorème *Problème de Cauchy pour* $y' + a(x)y = b(x)$

Soient $a,b \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$, A une primitive de a sur I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (y(x_0) = y_0 \text{ est appelée } \textit{condition initiale})$$

Q37. Énoncé du théorème « *Principe de superposition pour une équation différentielle du 1er ordre* ».

Théorème *Principe de superposition*

Soient $a, b_1, b_2 \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$.

Si y_1 est solution sur I de l'équation $y' + a(x)y = b_1(x)$ et si y_2 est solution sur I de l'équation $y' + a(x)y = b_2(x)$, alors $y_1 + y_2$ est une solution de l'équation $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

Q38. Énoncé du théorème « *Équation différentielle* $ay'' + by' + cy = 0$ ».

Théorème *Équation différentielle* $ay'' + by' + cy = 0$

Soient $a,b,c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$. On appelle *polynôme caractéristique* de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ le polynôme $aX^2 + bX + c$. Notons Δ son discriminant.

Soit S l'ensemble des solutions de $ay'' + by' + cy = 0$, alors

- *Si* $\Delta \neq 0$ $(\mathbb{K} = \mathbb{C})$ ou $\Delta > 0$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$*:* soient r_1 et r_2 les racines distinctes de $aX^2 + bX + c$
$$S = \left\{ x \longmapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K} \right\} = \text{Vect}\left(x \longmapsto e^{r_1 x}, x \longmapsto e^{r_2 x} \right).$$
- *Si* $\Delta = 0$: soit r_0 l'unique racine de $aX^2 + bX + c$
$$S = \left\{ x \longmapsto (\lambda x + \mu) e^{r_0 x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K} \right\} = \text{Vect}\left(x \longmapsto e^{r_0 x}, x \longmapsto x\, e^{r_0 x} \right).$$
- *Si* $\Delta < 0$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$*:*
Soient $r_1 = r + i\omega$ et $r_2 = r - i\omega$ les racines complexes conjuguées de $aX^2 + bX + c$
$$S = \left\{ x \longmapsto (\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)) e^{rx} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(x \longmapsto \cos(\omega x) e^{rx}, x \longmapsto \sin(\omega x) e^{rx} \right).$$

Q39. Énoncé et démonstration « *Solution générale et particulière de* $ay'' + by' + cy = f(x)$ ».

Théorème *Solution générale et particulière de* $ay'' + by' + cy = f(x)$

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, avec $a \neq 0$, I un intervalle, $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$,

y_p une solution fixée de l'équation $ay'' + by' + cy = f(x)$ sur I dite *solution particulière.*

Soit $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fois dérivables, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $ay'' + by' + cy = f$ sur I

(ii) il existe y_H une solution de l'équation homogène, $y = y_H + y_P$.

Q40. Énoncé du théorème « *Problème de Cauchy pour* $ay'' + by' + cy = f(x)$ ».

Théorème *Problème de Cauchy pour* $ay'' + by' + cy = f(x)$

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, $x_0 \in I$ et $y_0, y_0{}' \in \mathbb{K}$.

Il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases} \qquad (y(x_0) = y_0 \text{ et } y'(x_0) = y_0{}' \text{ sont appelées } \textit{conditions initiales})$$

Q41. Énoncé de la méthode « *Cas particuliers de recherche de solutions particulières équation différentielle du second ordre*».

Méthode *Cas particuliers de recherche de solutions particulières*

✓ Soient $a, b, c, \omega \in \mathbb{K}$, P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Pour des équations de la forme :

$$ay'' + by' + cy = P(x)e^{\omega x}.$$

On cherche une solution particulière sous la forme :

(i) $y(x) = Q(x)e^{\omega x}$ avec $\deg Q = \deg P$, si ω n'est pas une racine de $aX^2 + bX + c$.

(ii) $y(x) = xQ(x)e^{\omega x}$ avec $\deg Q = \deg P$, si ω est une racine simple de $aX^2 + bX + c$.

(ii) $y(x) = x^2 Q(x)e^{\omega x}$ avec $\deg Q = \deg P$, si ω est une racine double de $aX^2 + bX + c$.

✓ Soient $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$, P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Pour des équations de la forme :

$$ay'' + by' + cy = P(x)\cos(\alpha x) \text{ ou } ay'' + by' + cy = P(x)\sin(\alpha x).$$

On plonge le calcul dans $\mathbb{C}$ en recherchant une solution $y_{\mathbb{C}}$ de $ay'' + by' + cy = P(x)e^{i\alpha x}$, en utilisant la méthode vu précédemment, avec dans ce cas $\omega = \alpha\,i$.

Au final, $\mathrm{Re}(y_{\mathbb{C}})$ est une solution de $ay'' + by' + cy = P(x)\cos(\alpha x)$ et $\mathrm{Im}(y_{\mathbb{C}})$ est une solution de $ay'' + by' + cy = P(x)\sin(\alpha x)$.

Q42. Énoncé de la méthode « *Montrer qu'une suite est monotone* ».

Méthode *Montrer qu'une suite est monotone*

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, deux méthodes sont couramment utilisées :

✓ Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$,

✓ **Si** $u_n > 0$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$, étudier la position de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1 — surtout intéressant lorsque la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne fait intervenir que des produits ou des quotients et que l'on peut espérer des simplifications au numérateur et au dénominateur.

Q43. Énoncé de la définition « *Propriété vraie à partir d'un certain rang* ».

Définition *Propriété vraie à partir d'un certain rang*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\mathcal{P}$ une propriété.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifie la propriété* $\mathcal{P}$ *à partir d'un certain rang* si :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Big(n \geqslant N \Longrightarrow u_n \text{ vérifie } \mathcal{P}\Big).$$

Q44. Énoncé de la définition « *Suite définie explicitement* ».

Définition *Suite définie explicitement*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et f une fonction.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie *explicitement*, si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = f(n)$.

Q45. Énoncé de la définition « *Suite définie par récurrence* ».

Définition *Suite définie par récurrence*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et f une fonction.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie *par récurrence*, si son premier terme u_0 est donné et si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Q46. Énoncé de la définition « *Partie stable par une fonction* ».

Définition *Partie stable par une fonction*

Soient E une partie de $\mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et D une partie de E.

On dit que D est *stable par f* si $f(D) \subset D$. *i.e.* si $\forall x \in D, \quad f(x) \in D$.

Q47. Énoncé et démonstration « *Existence d'une suite définie par récurrence* ».

Théorème *Existence d'une suite définie par récurrence*

Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur D et tel que D soit stable par f.
Quel que soit $a \in D$, il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

De plus, cette suite est à valeurs dans D.

Q48. Énoncé du théorème « *Expression explicite d'une suite arithmétique* ».

Théorème *Expression explicite d'une suite arithmétique*

Soient $r \in \mathbb{R}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad u_n = u_p + (n-p)r.$$

Q49. Énoncé du théorème « *Somme des n premiers entiers* ».

Théorème *Somme des n premiers entiers*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Q50. Énoncé du théorème « *Somme arithmétiques* ».

Théorème *Somme arithmétiques*

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétiques s'obtient avec la formule suivante :

$$(\text{Nombre de termes}) \times \frac{(\text{Premier terme}) + (\text{Dernier terme})}{2}.$$

Q51. Énoncé de la définition « *Suite géométrique* ».

Définition *Suite géométrique*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $q \in \mathbb{R}^*$.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *géométrique* (*de raison* q) si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q u_n.$$

Q52. Énoncé du théorème « *Expression explicite d'une suite géométrique* ».

Théorème *Expression explicite d'une suite géométrique*

Soient $q \in \mathbb{R}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \; u_n = u_p q^{n-p}.$$

Q53. Énoncé du théorème « *Somme géométrique et somme des premières puissances d'un nombre complexe* ».

Théorème *Somme géométrique et somme des premières puissances d'un nombre complexe*

La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ s'obtient avec la formule suivante :

$$(\text{Premier terme}) \times \frac{1 - q^{(\text{Nombre de termes})}}{1-q}.$$

Q54. Énoncé de la définition « *Suite arithmético-géométrique* ».

Définition *Suite arithmético-géométrique*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $a, b \in \mathbb{R}^*$.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *arithmético-géométrique* (*de raison géométrique* a *et de raison arithmétique* b) si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a\, u_n + b$$

Q55. Énoncé de la méthode « *Obtention de la forme explicite d'une suite arithmético-géométrique* ».

Méthode *Obtention de la forme explicite d'une suite arithmético-géométrique*

1. On cherche $\ell \in \mathbb{R}$, l'unique point fixe de la fonction $x \longmapsto ax+b$, *i.e.* ℓ est solution de $\ell = a\ell + b$.
2. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \ell$. On montre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
3. On en déduit la forme explicite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis enfin la forme explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q56. Énoncé de la définition « *Voisinage dans* $\mathbb{R}$ ».

Définition *Voisinage dans* $\mathbb{R}$

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On appelle *voisinage* de ℓ (*dans* $\mathbb{R}$) toute partie de $\mathbb{R}$ contenant :

- si $\ell \in \mathbb{R}$, un intervalle de la forme $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$;
- si $\ell = +\infty$, un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$;
- si $\ell = -\infty$, un intervalle de la forme $]-\infty, A[$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Q57. Énoncé du théorème « *Intersection de deux voisinages* ».

Théorème *Intersection de deux voisinages*

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ sont deux voisinages de ℓ alors $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ est un voisinage de ℓ.

Q58. Énoncé du théorème « *Distinction de deux points par leurs voisinages* ».

Théorème *Distinction de deux points par leurs voisinages*

Soient $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $\ell \neq \ell'$, alors, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de ℓ et un voisinage $\mathcal{V}'$ de ℓ' tel que $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}' = \varnothing$.

Q59. Énoncé de la définition « *Propriété vraie au voisinage d'un point* ».

Définition *Propriété vraie au voisinage d'un point*

Soient $P(x)$ une proposition dépendante de $x \in \mathbb{R}$, et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que *la propriété P est vraie au voisinage de ℓ* s'il existe au moins un voisinage $\mathcal{V}$ de ℓ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad P(x) \text{ est vraie.}$$

Q60. Énoncé de la définition « *Limite d'une suite* ».

Définition *Limite d'une suite*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- ***Définition générale*** **:** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet* ℓ *pour limite* si tout voisinage de ℓ contient tous les u_n à partir d'un certain rang, *i.e.*

  pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de ℓ, u_n appartient à $\mathcal{V}$ à partir d'un certain rang
- ***Cas d'une limite finie*** **:** Lorsque $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet* ℓ *pour limite* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Big(n > N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon\Big)$$

- ***Cas de la limite*** $+\infty$ **:** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet* $+\infty$ *pour limite* si :

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Big(n > N \Longrightarrow u_n > A\Big)$$

- ***Cas de la limite*** $-\infty$ **:** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet* $-\infty$ *pour limite* si :

$$\forall A < 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Big(n > N \Longrightarrow u_n < A\Big)$$

Q61. Énoncé et démonstration « *Convergence et caractère bornée*».

Théorème *Convergence et caractère bornée*

Toute suite convergente est bornée.

Q62. Énoncé du théorème « *Composition à gauche par une fonction* ».

Théorème *Composition à gauche par une fonction*

Soient I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $\ell \in \overline{I}$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite.

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ et si } \lim_{x\to\ell} f(x) = L, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L$$

Q63. Énoncé du théorème « *Limites et inégalités strictes* ».

Théorème *Limites et inégalités strictes*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle possédant une limite (finie ou non) et $m, M \in \mathbb{R}$.

(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < M$, alors $u_n < M$ à partir d'un certain rang.

(ii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > m$, alors $u_n > m$ à partir d'un certain rang.

Q64. Énoncé du théorème « *Limites et inégalités larges* ».

Théorème *Limites et inégalités larges*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles possédant une limite finie.

Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Q65. Énoncé de la définition « *Suite extraite* ».

Définition *Suite extraite*

- On appelle *extractrice* toute fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.
- Étant donné $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite on appelle *suite extraite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une extractrice.

Q66. Énoncé du théorème « *Théorème des suites extraites* ».

Théorème *Théorème des suites extraites*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell$

(iii) Toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite.

Q67. Énoncé du théorème « *Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration* ».

Théorème *Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) Théorème des gendarmes/d'encadrements :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = \lim\limits_{n\to+\infty} M_n = \ell$ et si $m_n \leqslant u_n \leqslant M_n$ à partir d'un certain rang, alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **existe** et vaut ℓ.

(ii) Théorème de minoration :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = +\infty$ et si $u_n \geqslant m_n$ à partir d'un certain rang, alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **existe** et vaut $+\infty$.

(iii) Théorème de majoration :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = -\infty$ et si $u_n \leqslant M_n$ à partir d'un certain rang, alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **existe** et vaut $-\infty$.

Q68. Énoncé du théorème « *Limite d'une suite géométrique* ».

Théorème *Limite d'une suite géométrique*

Soit $q \in \mathbb{R}$

	$q > 1$	$q = 1$	$\lvert q\rvert < 1$	$q \leqslant -1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$	$+\infty$	1	0	Pas de limite

Q69. Énoncé du théorème « *Théorème de la limite monotone* ».

Théorème *Théorème de la limite monotone*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

$$\text{Si } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est monotone, alors } \lim_{n\to+\infty} u_n \textbf{ existe}.$$

Plus précisément :

(i) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(ii) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Q70. Énoncé de la définition « *Suites adjacentes* ».

Définition *Suites adjacentes*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si :

$$\text{l'une de ces suites est croissante, l'autre décroissante et } \lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$$

Q71. Énoncé du théorème « *Théorème des suites adjacentes* ».

Théorème *Théorème des suites adjacentes*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

Si elles sont adjacentes, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes deux convergentes de même limite ℓ.

Précisément, si c'est $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ell \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$$

Q72. Énoncé de la définition « *Suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants* ».

Définition *Suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $a, b \in \mathbb{R}$.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants* si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$$

Q73. Énoncé du théorème « *Terme général d'une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants* ».

Théorème *Terme général d'une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$.

On appelle *polynôme caractéristique*, le polynôme $X^2 - aX - b$.

Notons Δ sont discriminant.

Soit S l'ensemble des solutions de $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, alors

- ✓ Si $\Delta > 0$, soit r_1 et r_2 les racines distinctes de $X^2 - aX - b$
$$S = \left\{ \left(\lambda r_1^n + \mu r_2^n \right)_{n\in\mathbb{N}} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$
- ✓ Si $\Delta = 0$, soit r_0 l'unique racine de $X^2 - aX - b$
$$S = \left\{ \left((\lambda + \mu n) r_0^n \right)_{n\in\mathbb{N}} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$
- ✓ Si $\Delta < 0$, soit $r_1 = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $r_2 = \rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ les racines complexes conjuguées de $X^2 - aX - b$.
$$S = \left\{ \left((\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)) \rho^n \right)_{n\in\mathbb{N}} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Q74. Énoncé du théorème « *Monotonie d'une suite définie par récurrence* ».

Théorème *Monotonie d'une suite définie par récurrence*

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, $u_0 \in D$ et f une fonction définie sur D et tel que D soit stable par f.

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = f(u_n)$.

(i) Si f est croissante, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Son sens de variation dépend de la position de u_0 par rapport à u_1.

(ii) Si f est décroissante, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires.

Leurs sens de variation dépendent de la position de u_0 et u_2.

Q75. Énoncé du théorème « *Limite d'une suite convergente définie par récurrence* ».

Théorème *Limite d'une suite convergente définie par récurrence*

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, $u_0 \in D$ et f une fonction définie sur D et tel que D soit stable par f.

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ et si f est continue en ℓ, alors

$$\ell \text{ est un point fixe de } f, \textit{ i.e. } f(\ell) = \ell$$

Q76. Énoncé de la définition « *Partie dense dans* $\mathbb{R}$ ».

Définition *Partie dense dans* $\mathbb{R}$

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si tout intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un singleton contient un élément de $\mathcal{A}$.

Q77. Énoncé du théorème « *Caractérisation séquentielle de la densité* ».

Théorème *Caractérisation séquentielle de la densité*

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{R}$

(ii) Tout réel est la limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

Q78. Énoncé du théorème « *Caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures* ».

Théorème *Caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures*

Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

(i) $b = \sup \mathcal{A}$ si et seulement si b est un majorant de $\mathcal{A}$ et est la limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

(ii) $b = \inf \mathcal{A}$ si et seulement si b est un minorant de $\mathcal{A}$ et est la limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

Q79. Énoncé du théorème « *Caractérisation séquentielle d'un ensemble non majoré, non minoré* ».

Théorème *Caractérisation séquentielle d'un ensemble non majoré, non minoré*

Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$.

(i) $\mathcal{A}$ est non majoré si, et seulement si, il existe une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ ayant pour limite $+\infty$.

(ii) $\mathcal{A}$ est non minoré si, et seulement si, il existe une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ ayant pour limite $-\infty$.