Année 2024-2025
Promo 32 – 1$^{\text{ère}}$ Année

Programme de Colle 11
Semaine 51 – du 16 au 20 décembre 2024

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative)
ou une primitive usuelle, sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de ***l'ensemble*** du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes …) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 2 : Fonctions réelles (Tout le chapitre)

Chapitre 3 : Équations différentielles (Tout le chapitre)

Chapitre 4 : Les suites numériques

1. Introduction sur les suites
   - 1.1. Définition et vocabulaire sur les suites
   - 1.2. Suite définie explicitement, définie par récurrence
   - 1.3. Suites arithmétiques
   - 1.4. Suites géométriques
   - 1.5. Suites arithmético-géométrique
2. Limite d'une suite
   - 2.1. Topologie
   - 2.2. Limite d'une suite
   - 2.3. Convergence et divergence d'une suite
3. Manipulation des limites
   - 3.1. Opérations sur les limites
   - 3.2. Composition à gauche par une fonction
   - 3.3. Passage à la limite dans les inégalités
   - 3.4. Suite extraite
4. Théorèmes d'existence des limites
   - 4.1. Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration
   - 4.2. Théorème de la limite monotone
   - 4.3. Théorème des suites adjacentes

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur !**

Questions de cours :

Q1. Énoncé et démonstration « *La formule d'intégration par parties* ».

Théorème *La formule d'intégration par parties*

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs dérivées u' et v' sont continues sur I, alors, pour tout $(a,b) \in I^2$:

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$$

Q2. Énoncé et démonstration « *Dérivée des fonctions de la forme* $x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ ».

Théorème *Dérivée des fonctions de la forme* $x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$

Soient I un intervalle, $u : I \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction dérivable, alors la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$$

Q3. Énoncé et démonstration « *Convergence et caractère bornée* ».

Théorème *Convergence et caractère bornée*

Toute suite convergente est bornée.

Q4. Démonstration du théorème suivant

Théorème

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limites respectives $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$.

Alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$.

Q5. Énoncé et démonstration « *Théorème des suites extraites* ».

Théorème *Théorème des suites extraites*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell$

(iii) Toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite.

Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 4 : Systèmes linéaires d'équations

Savoir résoudre un système **avec la méthode du pivot de Gauss.**

Chapitre 5 : Applications et relations binaires

1 Définitions

2 Image et image réciproque d'une partie

3 Injections, surjections, bijections

4 Relations binaires

4.1 Définition

4.2 Relations d'équivalences

L'ensemble quotient a été vu uniquement en exercice.
Le fait qu'il constitue une partition de E aussi.

Questions de cours

Q1 : Soit f une applications de E dans F.
Définition de l'**image** $f(A)$ **d'une partie** A de E par f.
Définition de l'ensemble $\text{Im} f$.
Définition de l'**image réciproque** $f^{-1}(A)$ **d'une partie** A de F par f.

Q2 : Définition d'une application **injective**,
définition d'une application **surjective**
et définition d'une application **bijective**.

Q3 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 1
Soit f une applications de E dans F et g une application de F dans G.
Si f et g sont deux fonctions bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Q4 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 2
Soit $f : E \mapsto F$. Si E et F sont des ensembles **finis de même cardinal** alors :
f est bijective $\Leftrightarrow$ f est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective.

Q5 : Énoncé de :

Définition 1
Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur un ensemble E non vide.

- $\mathscr{R}$ est dite **réflexive** si : $\forall x \in E, \quad x\mathscr{R}x$.
- $\mathscr{R}$ est dite **symétrique** si : $\forall (x,y) \in E^2, \quad x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x$.
- $\mathscr{R}$ est dite **transitive** si : $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z) \quad \Rightarrow \quad x\mathscr{R}z$.
- $\mathscr{R}$ est dite **antisymétrique** si : $\forall (x,y) \in E^2, \quad (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x) \quad \Rightarrow \quad x = y$.