

Programme de Colle 12

Semaine 2 – du 6 au 10 janvier 2025

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative)
ou une primitive usuelle, sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de *l'ensemble* du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 2 : Fonctions réelles (Tout le chapitre)

Chapitre 3 : Équations différentielles (Tout le chapitre)

Chapitre 4 : Les suites numériques

1. Introduction sur les suites
 - 1.1. Définition et vocabulaire sur les suites
 - 1.2. Suite définie explicitement, définie par récurrence
 - 1.3. Suites arithmétiques
 - 1.4. Suites géométriques
 - 1.5. Suites arithmético-géométrique
 2. Limite d'une suite
 - 2.1. Topologie
 - 2.2. Limite d'une suite
 - 2.3. Convergence et divergence d'une suite
 3. Manipulation des limites
 - 3.1. Opérations sur les limites
 - 3.2. Composition à gauche par une fonction
 - 3.3. Passage à la limite dans les inégalités
 - 3.4. Suite extraite
 4. Théorèmes d'existence des limites
 - 4.1. Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration
 - 4.2. Théorème de la limite monotone
 - 4.3. Théorème des suites adjacentes
 5. Étude de suites définies par récurrence
 - 5.1. Suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants
 - 5.2. Suites récurrentes, cas général
 6. Caractérisation séquentielle
 - 6.1. Caractérisation séquentielle de la densité
 - 6.2. Caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures
- Suites : Opérations sur les limites

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur** !

Questions de cours :

Q1. Énoncé et démonstration « *La formule d'intégration par parties* ».

**Théorème***La formule d'intégration par parties*

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs dérivées u' et v' sont continues sur I , alors, pour tout $(a, b) \in I^2$:

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Q2. Énoncé et démonstration « *Dérivée des fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$* ».

**Théorème***Dérivée des fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$*

Soient I un intervalle, $u : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable, alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

Q3. Énoncé et démonstration « *Convergence et caractère bornée* ».

**Théorème***Convergence et caractère bornée*

Toute suite convergente est bornée.

Q4. Démonstration du théorème suivant

**Théorème**

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limites respectives $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$.

Alors $u_n + v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell + \ell'$.

Q5. Énoncé et démonstration « *Théorème des suites extraites* ».

**Théorème***Théorème des suites extraites*

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.
- (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \ell$
- (iii) Toute suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite.

Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 4 : Systèmes linéaires d'équations

Savoir résoudre un système avec la méthode du pivot de Gauss.

Chapitre 5 : Applications et relations binaires

1 Définitions

2 Image et image réciproque d'une partie

3 Injections, surjections, bijections

4 Relations binaires

4.1 Définition

4.2 Relations d'équivalences

L'ensemble quotient a été vu uniquement en exercice.

Le fait qu'il constitue une partition de E aussi.

Chapitre 6 : Nombres complexes partie 2

Tout le chapitre est au programme

1 Calculs de sommes

$$(1 + e^{i\theta}), \quad (1 - e^{i\theta}), \quad e^{i\alpha} + e^{i\beta}, \quad e^{i\alpha} - e^{i\beta}$$

2 Expression de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$

3 Linéarisation de $\cos^p(\theta)$ et $\sin^p(\theta)$

4 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

4.1 Racines n-ièmes de 1

Exemple à retenir : racines cubiques de 1, définition du nombre j .

4.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul

Questions de cours

Q1 : Soit f une applications de E dans F .

Définition de l'**image** $f(A)$ **d'une partie** A de E par f .

Définition de l'ensemble $\text{Im} f$.

Définition de l'**image réciproque** $f^{-1}(A)$ **d'une partie** A de F par f .

Q2 : Définition d'une application **injective**,

définition d'une application **surjective**

et définition d'une application **bijective**.

Q3 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 1

Soit $f : E \mapsto F$. Si E et F sont des ensembles **finis de même cardinal** alors :

f est bijective $\Leftrightarrow f$ est injective $\Leftrightarrow f$ est surjective.

Q4 : Énoncé de :

Définition 1

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E non vide.

- $\mathcal{R}$ est dite **réflexive** si : $\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ est dite **symétrique** si : $\forall (x, y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ est dite **transitive** si : $\forall (x, y, z) \in E^3, \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
- $\mathcal{R}$ est dite **antisymétrique** si : $\forall (x, y) \in E^2, \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.

Q5 : Énoncé de

Propriété 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

Il existe n racines n -ièmes complexes de 1, ce sont les nombres de la forme $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ième de l'unité. $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$.

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \left(e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^k, k \in [0, n-1] \right\} = \{w_1^k, k \in [0, n-1]\}.$$

Q6 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 2

La somme des racines n -ièmes de 1 est égale à 0.

Les racines n -ièmes de 1 différentes de 1 sont les solutions de l'équation $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$.