

Programme de Colle 14

Semaine 4 – du 20 au 24 janvier 2025

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative)
ou une primitive usuelle, sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de *l'ensemble* du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 2 : Fonctions réelles (Tout le chapitre)

Chapitre 3 : Équations différentielles (Tout le chapitre)

Chapitre 4 : Les suites numériques

1. Introduction sur les suites
 - 1.1. Définition et vocabulaire sur les suites
 - 1.2. Suite définie explicitement, définie par récurrence
 - 1.3. Suites arithmétiques
 - 1.4. Suites géométriques
 - 1.5. Suites arithmético-géométrique
 2. Limite d'une suite
 - 2.1. Topologie
 - 2.2. Limite d'une suite
 - 2.3. Convergence et divergence d'une suite
 3. Manipulation des limites
 - 3.1. Opérations sur les limites
 - 3.2. Composition à gauche par une fonction
 - 3.3. Passage à la limite dans les inégalités
 - 3.4. Suite extraite
 4. Théorèmes d'existence des limites
 - 4.1. Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration
 - 4.2. Théorème de la limite monotone
 - 4.3. Théorème des suites adjacentes
 5. Étude de suites définies par récurrence
 - 5.1. Suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants
 - 5.2. Suites récurrentes, cas général
 6. Caractérisation séquentielle
 - 6.1. Caractérisation séquentielle de la densité
 - 6.2. Caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures
- Suites : Opérations sur les limites

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur** !

Questions de cours :

Q1. Énoncé et démonstration « *La formule d'intégration par parties* ».



Théorème

La formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs dérivées u' et v' sont continues sur I , alors, pour tout $(a, b) \in I^2$:

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Q2. Énoncé et démonstration « *Dérivée des fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$* ».



Théorème

Dérivée des fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$

Soient I un intervalle, $u : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction dérivable, alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

Q3. Énoncé et démonstration « *Convergence et caractère bornée* ».



Théorème

Convergence et caractère bornée

Toute suite convergente est bornée.

Q4. Démonstration du théorème suivant



Théorème

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limites respectives $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$.

Alors $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell + \ell'$.

Q5. Énoncé et démonstration « *Théorème des suites extraites* ».



Théorème

Théorème des suites extraites

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.
- (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \ell$
- (iii) Toute suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite.

Algèbre

À la page suivante :

Chapitre 6 : Nombres complexes partie 2

Tout le chapitre est au programme

Chapitre 7 : Structures algébriques

Tout le chapitre est au programme

1 Loi de composition interne

1.1 Définitions

1.2 Distributivité d'une loi sur une autre

1.3 Parties stables par une loi

2 Groupes et sous-groupes

3 Morphismes de groupes

3.1 Définitions et propriétés

3.2 Noyau et image

Questions de cours page suivante

Questions de cours

Q1 : Énoncé de

Propriété 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

Il existe n racines n -ièmes complexes de 1, ce sont les nombres de la forme $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ième de l'unité. $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$.

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \left(e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^k, k \in [0, n-1] \right\} = \{w_1^k, k \in [0, n-1]\}.$$

Q2 : Énoncé de la définition d'un groupe

Définition 1

Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $*$.

On dit que $(G, *)$ est un **groupe** lorsque :

- $*$ est associative ;
- $*$ admet un élément neutre $e \in G$;
- tout élément $x \in G$ admet un inverse (ou symétrique) pour $*$ dans G .

Si de plus, $*$ est commutative, on dira que $(G, *)$ est un groupe commutatif ou abélien.

Q3 : Énoncé de :

Propriété 1

Caractérisation des sous-groupes : Soit $(G, *)$ un groupe et $H \subset G$.

$(H, *)$ sous-groupe de $(G, *)$ si et seulement si :

- $1_G \in H$
- $\forall x \in H, x^{-1} \in H$
- $\forall (x, y) \in H^2, x * y \in H$.

OU

- $1_G \in H$
- $\forall (x, y) \in H^2, x * y^{-1} \in H$

Q4 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 2

Soient $(G, *)$ et $(H, \boxtimes)$ deux groupes de neutres respectifs e_G et e_H .

Si $f : G \mapsto H$ est un morphisme de groupe, alors

1. $f(e_G) = e_H$.
2. $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

Q5 : Définition de l'**image et du noyau d'un morphisme de groupe** :

Soit f un morphisme de $(G_1, *)$ de neutre e_1 dans (G_2, Δ) de neutre e_2 .

$f(G_1)$ est appelé l'image du morphisme f noté $Im f$.

$$Im f = \{y \in G_2, \exists x \in G_1, f(x) = y\}$$

$f^{-1}(\{e_2\})$ est appelé le noyau du morphisme f , noté $\ker f$.

$$\ker f = \{x \in G_1, f(x) = e_2\}$$