Année 2024-2025
Promo 32 – $1^{\text{ère}}$ Année

Programme de Colle 15
Semaine 6 – du 3 au 7 février 2025

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative)
  ou une primitive usuelle **ou** un équivalent usuel en 0 ainsi que son écriture équivalente avec o, sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de ***l'ensemble*** du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 3 : Équations différentielles (Tout le chapitre)

Chapitre 4 : Les suites numériques (Tout le chapitre)

Chapitre 5 : Limites et comparaison des fonctions

1. Définitions de la limite d'une fonction
   - 1.1. Limite d'une fonction en un point
   - 1.2. Limite d'une fonction à droite, à gauche en un point
2. Manipulation des limites de fonctions
   - 2.1. Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction
   - 2.2. Opérations sur les limites
   - 2.3. Passage à la limite dans les inégalités
3. Théorèmes d'existence des limites
   - 3.1. Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration
   - 3.2. Théorème de la limite monotone
4. Négligeabilité, domination
   - 4.1. Définitions
   - 4.2. Opérations relatives à la négligeabilité et à la domination
5. Équivalence
   - 5.1. Définition
   - 5.2. Opérations sur les équivalents
   - 5.3 Équivalents usuels en 0

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur !**

Liste des équivalents usuels en 0 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

- **Logarithme, exponentielle, puissances :**

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \iff e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \iff (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques circulaires :**

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \iff \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$
$$\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \tan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques circulaires inverses :**

$$\mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \mathrm{Arcsin}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \mathrm{Arctan}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques hyperboliques :**

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \mathrm{sh}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \iff \mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$
$$\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \mathrm{th}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

Questions de cours :

Q1. Énoncé et démonstration « *Convergence et caractère bornée* ».

Théorème *Convergence et caractère bornée*

Toute suite convergente est bornée.

Q2. Démonstration du théorème suivant

Théorème

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limites respectives $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$.

Alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$.

Q3. Énoncé et démonstration « *Caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures* ».

Théorème *Caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures*

Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

(i) $b = \sup \mathcal{A}$ si et seulement si b est un majorant de $\mathcal{A}$ et est la limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

(ii) $b = \inf \mathcal{A}$ si et seulement si b est un minorant de $\mathcal{A}$ et est la limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

Q4. Énoncé et démonstration « *Unicité de la limite* ».

Théorème *Unicité de la limite*

Soient X une partie de $\mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

(i) Si f possède une limite en a, celle-ci est unique, notée $\lim\limits_a f$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, la relation $\lim\limits_a f = \ell$ se note souvent $f \underset{a}{\to} \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

(ii) Si $a \in X$ et si f possède une limite en a, alors : $\lim\limits_a f = f(a)$.

Q5. Énoncé « *Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration* » et démonstration du théorème des gendarmes

Théorème *Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration*

Soient X une partie de $\mathbb{R}$, $f, m, M : X \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) Théorème des gendarmes/d'encadrement :

Si $\lim\limits_a m = \lim\limits_a M = \ell$ et si $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f$ **existe** et vaut ℓ.

(ii) Théorème de minoration :

Si $\lim\limits_a m = +\infty$ et si $f(x) \geqslant m(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f$ **existe** et vaut $+\infty$.

(iii) Théorème de majoration :

Si $\lim\limits_a M = -\infty$ et si $f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f$ **existe** et vaut $-\infty$.

Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 7 : Structures algébriques

Tout le chapitre est au programme

Chapitre 8 : Polynômes

1 L'espace des polynômes

1.1 Définition

1.2 Opérations

1.3 Notation définitive des polynômes

1.4 Degré

1.5 Structure d'anneau

La définition d'un anneau n'est pas au programme.

1.6 Composition

1.7 Fonction associée

2 Division euclidienne

3 Racines d'un polynôme

3.1 Multiplicité d'une racine

3.2 Nombre maximal de racines

3.3 Polynômes scindés

4 Relations coefficients racines

4.1 Polynômes de degré 2

4.2 Polynômes de degré quelconque

Produit et somme des racines uniquement. Les autres relations ne sont pas au programme.

Questions de cours page suivante

Questions de cours

Q1 : Énoncé de :

Propriété 1
Caractérisation des sous-groupes : Soit $(G, *)$ un groupe et $H \subset G$.
$(H, *)$ sous-groupe de $(G, *)$ si et seulement si :
- $1_G \in H$
- $\forall x \in H, \quad x^{-1} \in H$
- $\forall (x, y) \in H^2, \quad x * y \in H.$

OU
- $1_G \in H$
- $\forall (x, y) \in H^2, \quad x * y^{-1} \in H$

Q2 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 2
Soient $(G, *)$ et $(H, \boxtimes)$ deux groupes de neutres respectifs e_G et e_H.
Si $f : G \mapsto H$ est un morphisme de groupe, alors
1. $f(e_G) = e_H$.
2. $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

Q3 : Définition de l'**image et du noyau d'un morphisme de groupe** :
Soit f un morphisme de $(G_1, *)$ de neutre e_1 dans $(G_2, \triangle)$ de neutre e_2.

$f(G_1)$ est appelé l'image du morphisme f noté Imf.
$$Imf = \{y \in G_2, \exists x \in G_1, f(x) = y\}$$

$f^{-1}(\{e_2\})$ est appelé le noyau du morphisme f, noté $\ker f$.
$$\ker f = \{x \in G_1, f(x) = e_2\}$$

Q4 : **Division euclidienne dans** $\mathbb{K}[X]$ **:** Énoncé et démonstration de l'unicité

Propriété 3
Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et B un élément non nul de $\mathbb{K}[X]$.
Il existe un **unique** couple (Q, R) de $\mathbb{K}[X]^2$ tel que $\boxed{A = BQ + R \quad \text{et} \quad deg(R) < deg(B).}$
Q est le quotient et R est le reste de la division euclidienne par B.
Si $R = 0$, B est un diviseur de A.

Q5 : Énoncé de la propriété « caractérisation des racines multiples » :

Propriété 4 (Caractérisation des racines multiples)
Soit $P \in \mathbb{K}[X], \alpha \in \mathbb{K}, m \in \mathbb{N}^*$
$$\boxed{\alpha \text{ est racine de multiplicité } m \text{ de } P \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}}$$

Q6 : Énoncé de la propriété « Nombre maximal de racines »

Propriété 5
Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$
- Si $\deg P = n$, alors P admet au plus n racines comptées avec multiplicité.
- Si le nombre de racines de P comptées avec multiplicité est supérieur ou égal à $n+1$ alors $P = 0$

En particulier, **seul le polynôme nul admet une infinité de racines.**