Année 2024-2025
Promo 32 – 1ère Année

Programme de Colle 17
Semaine 9 – du 24 au 28 février 2025

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative) **ou** une primitive usuelle **ou** un équivalent usuel en 0 ainsi que son écriture équivalente avec o, sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de ***l'ensemble*** du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes …) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 3 : Équations différentielles (Tout le chapitre)

Chapitre 4 : Les suites numériques (Tout le chapitre)

Chapitre 5 : Limites et comparaison des fonctions

1. Définitions de la limite d'une fonction
   - 1.1. Limite d'une fonction en un point
   - 1.2. Limite d'une fonction à droite, à gauche en un point
2. Manipulation des limites de fonctions
   - 2.1. Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction
   - 2.2. Opérations sur les limites
   - 2.3. Passage à la limite dans les inégalités
3. Théorèmes d'existence des limites
   - 3.1. Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration
   - 3.2. Théorème de la limite monotone
4. Négligeabilité, domination
   - 4.1. Définitions
   - 4.2. Opérations relatives à la négligeabilité et à la domination
5. Équivalence
   - 5.1. Définition
   - 5.2. Opérations sur les équivalents
   - 5.3 Équivalents usuels en 0

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur !**

Liste des équivalents usuels en 0 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

- **Logarithme, exponentielle, puissances :**

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \iff e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \iff (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques circulaires :**

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \iff \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$
$$\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \tan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques circulaires inverses :**

$$\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \operatorname{Arcsin}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \operatorname{Arctan}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques hyperboliques :**

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \operatorname{sh}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \iff \operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$
$$\operatorname{th}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \operatorname{th}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

Questions de cours :

Q1. Énoncé et démonstration « *Convergence et caractère bornée* ».

Théorème *Convergence et caractère bornée*

Toute suite convergente est bornée.

Q2. Démonstration du théorème suivant

Théorème

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limites respectives $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$.

Alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$.

Q3. Énoncé et démonstration « *Caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures* ».

Théorème *Caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures*

Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

(i) $b = \sup \mathcal{A}$ si et seulement si b est un majorant de $\mathcal{A}$ et est la limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

(ii) $b = \inf \mathcal{A}$ si et seulement si b est un minorant de $\mathcal{A}$ et est la limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

Q4. Énoncé et démonstration « *Unicité de la limite* ».

Théorème *Unicité de la limite*

Soient X une partie de $\mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

(i) Si f possède une limite en a, celle-ci est unique, notée $\lim\limits_a f$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, la relation $\lim\limits_a f = \ell$ se note souvent $f \underset{a}{\to} \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

(ii) Si $a \in X$ et si f possède une limite en a, alors : $\lim\limits_a f = f(a)$.

Q5. Énoncé « *Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration* » et démonstration du théorème des gendarmes

Théorème *Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration*

Soient X une partie de $\mathbb{R}$, $f, m, M : X \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) Théorème des gendarmes/d'encadrement :

Si $\lim\limits_a m = \lim\limits_a M = \ell$ et si $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f$ **existe** et vaut ℓ.

(ii) Théorème de minoration :

Si $\lim\limits_a m = +\infty$ et si $f(x) \geqslant m(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f$ **existe** et vaut $+\infty$.

(iii) Théorème de majoration :

Si $\lim\limits_a M = -\infty$ et si $f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f$ **existe** et vaut $-\infty$.

Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 8 : Polynômes

Tout le chapitre est au programme.

Chapitre 9 : Espaces vectoriels

1 Structure d'espace vectoriel

1.1 Définition

1.2 Exemples fondamentaux

1.3 Premières propriétés

1.4 Combinaisons linéaires

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition et exemple

2.2 Intersections de sous-espaces vectoriels

2.3 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

2.4 Somme de sous-espaces vectoriels

Questions de cours page suivante.

Questions de cours

Q1 : **Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$:** Énoncé et démonstration de l'unicité

Propriété 1
Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et B un élément non nul de $\mathbb{K}[X]$.
Il existe un **unique** couple (Q, R) de $\mathbb{K}[X]^2$ tel que $\boxed{A = BQ + R \quad \text{et} \quad deg(R) < deg(B).}$
Q est le quotient et R est le reste de la division euclidienne par B.
Si $R = 0$, B est un diviseur de A.

Q2 : Énoncé de la propriété « caractérisation de la multiplicité d'une racine » :

Propriété 2
Les trois propositions suivantes sont équivalentes :
- α est racine de multiplicité m de P
- $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.
- $P(\alpha) = 0$ et α est une racine de multiplicité $m-1$ de P'.

Q3 : Énoncé de la propriété « Nombre maximal de racines »

Propriété 3
Un polynôme non nul possède au plus $\deg(P)$ racines comptées avec multiplicité.
En particulier, seul le polynôme nul admet une infinité de racines.

Q4 : Énoncé de la définition d'une combinaison linéaire de vecteurs et d'un sev engendré par des vecteurs.

Définition 1
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(u_1, u_2, ..., u_n)$ une famille de n vecteurs de E. ($n \geqslant 1$)
On dit qu'un vecteur u est combinaison linéaire des vecteurs $(u_1, u_2, ..., u_n)$ ssi il existe des scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n$.

Définition 2
Soit $X = (u_1, u_2, ..., u_n)$ une famille finie de vecteurs de E.
On appelle sev engendré par les vecteurs $u_1, u_2, ..., u_n$ et on note $\text{Vect}(u_1, u_2, ..., u_n)$ ou $\text{Vect}(X)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, u_2, ..., u_n$.
$$\boxed{\text{Vect}(X) = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n, \quad (\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}}.$$

Q5 : Énoncé de la caractérisation des sous espaces vectoriels

Propriété 4
Caractérisation des sev :
Soit F une partie de E. Alors F est un sev de E ssi :
1. $0_E \in F$
2. $\forall (x, y) \in F^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad x + \lambda y \in F$