Programme de Colle 18
Semaine 10 – du 3 au 7 mars 2025

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative)
  ou une primitive usuelle **ou** un équivalent usuel en 0 ainsi que son écriture équivalente avec o, sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de ***l'ensemble*** du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 4 : Les suites numériques (Tout le chapitre)

Chapitre 5 : Limites et comparaison des fonctions (Tout le chapitre)

Chapitre 6 : Continuité

1. Définitions et premières propriétés
   - 1.1. Définitions
   - 1.2. Discontinuité de 1ère et de 2nde espèce, continuité par morceaux
   - 1.3. Prolongement par continuité en un point
   - 1.4. Caractérisation séquentielle de la continuité
   - 1.5. Opérations sur la continuité
2. Les grands théorèmes
   - 2.1. Théorème des valeurs intermédiaires
   - 2.2. Théorème des bornes atteintes
   - 2.3. Continuité d'une fonction réciproque

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur !**

Liste des équivalents usuels en 0 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

- **Logarithme, exponentielle, puissances :**

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \iff e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \iff (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques circulaires :**

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \iff \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$
$$\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \tan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques circulaires inverses :**

$$\mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \mathrm{Arcsin}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \mathrm{Arctan}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

- **Fonctions trigonométriques hyperboliques :**

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \mathrm{sh}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \iff \mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$
$$\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \mathrm{th}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

Questions de cours :

Q1. Démonstration du théorème suivant

Théorème

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limites respectives $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$.

Alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$.

Q2. Énoncé et démonstration « *Caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures* ».

Théorème *Caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures*

Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

(i) $b = \sup \mathcal{A}$ si et seulement si b est un majorant de $\mathcal{A}$ et est la limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

(ii) $b = \inf \mathcal{A}$ si et seulement si b est un minorant de $\mathcal{A}$ et est la limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

Q3. Énoncé « *Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration* » et démonstration du théorème des gendarmes

Théorème *Théorème des gendarmes, de minoration, de majoration*

Soient X une partie de $\mathbb{R}$, $f, m, M : X \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) Théorème des gendarmes/d'encadrements :

Si $\lim\limits_a m = \lim\limits_a M = \ell$ et si $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f$ **existe** et vaut ℓ.

(ii) Théorème de minoration :

Si $\lim\limits_a m = +\infty$ et si $f(x) \geqslant m(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f$ **existe** et vaut $+\infty$.

(iii) Théorème de majoration :

Si $\lim\limits_a M = -\infty$ et si $f(x) \leqslant M(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f$ **existe** et vaut $-\infty$.

Q4. Énoncé et démonstration du « *Théorème des valeurs intermédiaires* »

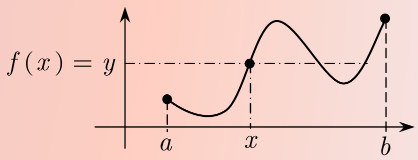
Théorème *Théorème des valeurs intermédiaires*

Soient I un **intervalle,** $a, b \in I$.

Si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, alors toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ possède **au moins** un antécédent par f entre a et b.

i.e. (en supposant en plus que $f(a) < f(b)$) :

$$\forall y \in [f(a), f(b)], \quad \exists x \in I, \quad f(x) = y$$



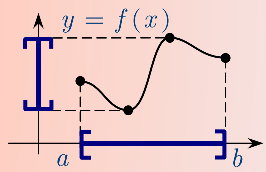
Q5. Énoncé et démonstration « *Théorème des bornes atteintes* »

Théorème *Théorème des bornes atteintes*

✓ Toute fonction continue sur un segment, est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit :

✓ L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.



Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 8 : Polynômes

Tout le chapitre est au programme.

Chapitre 9 : Espaces vectoriels

Tout le chapitre est au programme.

1 Structure d'espace vectoriel

1.1 Définition

1.2 Exemples fondamentaux

1.3 Premières propriétés

1.4 Combinaisons linéaires

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition et exemple

2.2 Intersections de sous-espaces vectoriels

2.3 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

2.4 Somme de sous-espaces vectoriels

2.5 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

2.6 Famille génératrice

2.7 Famille libre

2.8 Bases

Questions de cours page suivante.

Questions de cours

Q1 : **Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$:** Énoncé et démonstration de l'unicité

Propriété 1
Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et B un élément non nul de $\mathbb{K}[X]$.
Il existe un **unique** couple (Q, R) de $\mathbb{K}[X]^2$ tel que $\boxed{A = BQ + R \quad \text{et} \quad deg(R) < deg(B).}$
Q est le quotient et R est le reste de la division euclidienne par B.
Si $R = 0$, B est un diviseur de A.

Q2 : Énoncé de la propriété « caractérisation des racines multiples » :

Propriété 2 (Caractérisation des racines multiples)
Soit $P \in \mathbb{K}[X], \alpha \in \mathbb{K}, m \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\alpha \text{ est racine de multiplicité } m \text{ de } P \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}}$$

Q3 : Énoncé de la définition d'une combinaison linéaire de vecteurs et d'un sev engendré par des vecteurs.

Définition 1
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(u_1, u_2, ..., u_n)$ une famille de n vecteurs de E. $(n \geqslant 1)$
On dit qu'un vecteur u est combinaison linéaire des vecteurs $(u_1, u_2, ..., u_n)$ ssi il existe des scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n$.

Définition 2
Soit $X = (u_1, u_2, ..., u_n)$ une famille finie de vecteurs de E.
On appelle sev engendré par les vecteurs $u_1, u_2, ..., u_n$ et on note $\text{Vect}(u_1, u_2, ..., u_n)$ ou $\text{Vect}(X)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, u_2, ..., u_n$.

$$\boxed{\text{Vect}(X) = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n, \quad (\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}}.$$

Q4 : Énoncé de la caractérisation des sous espaces vectoriels

Propriété 3
Caractérisation des sev :
Soit F une partie de E. Alors F est un sev de E ssi :

1. $0_E \in F$
2. $\forall (x, y) \in F^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad x + \lambda y \in F$

Q5 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 4
Soit E un ev et F et G sont deux sev de E.
Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont en somme directe.
2. $\forall (f, g) \in F \times G,\ f + g = 0_E \Rightarrow f = g = 0_E$.
3. $F \cap G = \{0_E\}$