Année 2024-2025
Promo 32 – 1ère Année

Programme de Colle 23
Semaine 17 – du 22 au 25 avril 2025

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative)
  ou une primitive usuelle **ou** un équivalent usuel en 0 ainsi que son écriture équivalente avec o **ou** un développement limité usuel en 0, sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de ***l'ensemble*** du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 5 : Limites et comparaison des fonctions (Tout le chapitre)

Chapitre 6 : Continuité (Tout le chapitre)

Chapitre 7 : Dérivabilité (Tout le chapitre)

Chapitre 8 : Développements limités

1. Définitions et premières propriétés
2. Obtention des développements limités usuels en 0
   - 2.1. La formule de Taylor-Young
   - 2.2. Primitivation et dérivation des développements limités
3. Opérations sur les développements limités
4. Applications
   - 4.1. Développements limités au voisinage d'un point autre que 0
   - 4.2. Calculs de limites et recherche d'équivalents
   - 4.3. Étude locale d'une fonction au voisinage d'un point
   - 4.4. Étude locale d'une fonction au voisinage de l'infini

Développements limités et équivalents usuels en 0

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur !**

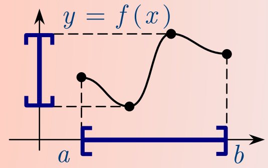
Développements limités et équivalents usuels en 0

Développements limités	Équivalents
$\forall n\in\mathbb{N},\quad e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\underset{x\to0}{o}(x^n)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\underset{x\to0}{o}(x^n)$	$e^x-1\underset{x\to0}{\sim}x$ $e^x\underset{x\to0}{\sim}1$
$\forall p\in\mathbb{N},\quad \mathrm{ch}(x)=\sum_{k=0}^{p}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\underset{x\to0}{o}(x^{2p})=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2p}}{(2p)!}+\underset{x\to0}{o}(x^{2p})$	$\mathrm{ch}(x)-1\underset{x\to0}{\sim}\frac{x^2}{2}$ $\mathrm{ch}(x)\underset{x\to0}{\sim}1$
$\forall p\in\mathbb{N},\quad \mathrm{sh}(x)=\sum_{k=0}^{p}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\underset{x\to0}{o}(x^{2p+1})=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+\underset{x\to0}{o}(x^{2p+1})$	$\mathrm{sh}(x)\underset{x\to0}{\sim}x$
$\mathrm{th}(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\underset{x\to0}{o}(x^5)$	$\mathrm{th}(x)\underset{x\to0}{\sim}x$
$\forall p\in\mathbb{N},\quad \cos(x)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\underset{x\to0}{o}(x^{2p})=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}+\underset{x\to0}{o}(x^{2p})$	$\cos(x)-1\underset{x\to0}{\sim}-\frac{x^2}{2}$ $\cos(x)\underset{x\to0}{\sim}1$
$\forall p\in\mathbb{N},\quad \sin(x)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\underset{x\to0}{o}(x^{2p+1})$ $=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+\underset{x\to0}{o}(x^{2p+1})$	$\sin(x)\underset{x\to0}{\sim}x$
$\tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\underset{x\to0}{o}(x^5)$	$\tan(x)\underset{x\to0}{\sim}x$
$\forall\alpha\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}^*,(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\underset{x\to0}{o}(x^n)$	$(1+x)^\alpha\underset{x\to0}{\sim}1.$ Si de plus $\alpha\neq0$, $(1+x)^\alpha-1\underset{x\to0}{\sim}\alpha x.$
$\forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+\underset{x\to0}{o}(x^n)$	$\frac{1}{1+x}-1\underset{x\to0}{\sim}-x$
$\forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\underset{x\to0}{o}(x^n)$	$\frac{1}{1-x}-1\underset{x\to0}{\sim}x$
$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+\underset{x\to0}{o}(x^n)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\underset{x\to0}{o}(x^n)$	$\ln(1+x)\underset{x\to0}{\sim}x$
$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+\underset{x\to0}{o}(x^n)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}+\underset{x\to0}{o}(x^n)$	$\ln(1-x)\underset{x\to0}{\sim}-x$
$\forall p\in\mathbb{N},\quad \mathrm{Arctan}(x)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\underset{x\to0}{o}(x^{2p+1})$ $=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{2p+1}+\underset{x\to0}{o}(x^{2p+1})$	$\mathrm{Arctan}(x)\underset{x\to0}{\sim}x$

Questions de cours :

Q1. Énoncé et démonstration « *Théorème des bornes atteintes* »

Théorème *Théorème des bornes atteintes*



✓ Toute fonction continue sur un segment, est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit :

✓ L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Q2. Énoncé et démonstration « *Théorème de Rolle* »

Théorème *Théorème de Rolle*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.

Alors : $$\exists c \in]a,b[,\ f'(c) = 0$$

Q3. Énoncé et démonstration « *Inégalité des accroissements finis* »

Théorème *Inégalité des accroissements finis*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et si $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in]a,b[, |f'(x)| \leqslant k$.

Alors : $$\forall x,y \in [a,b], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$$

Q4. Énoncé et démonstration « *Théorème de la limite de la dérivée* »

Théorème *Théorème de la limite de la dérivée*

Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

(i) Si f est continue en a, dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et f' admet une limite finie ℓ en a,

Alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$, donc f' est continue en a.

(ii) Si f est continue en a, dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et f' admet une limite infinie $(\pm\infty)$ en a,

Alors f n'est pas dérivable en a, et le graphe de f possède une tangente verticale au point d'abscisse a.

Q5. Énoncé et démonstration « *Formule de Taylor-Young* »

Théorème *Formule de Taylor-Young*

Soient I un intervalle, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$.

Alors, f admet un $DL_n(a)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right) \qquad \text{(Formule de Taylor-Young)}$$

Q6. Énoncé et démonstration « *Primitivation des développements limités* »

Théorème *Primitivation des développements limités*

Soient I un intervalle, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$.

Si f' admet un $DL_n(a)$: $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right)$, avec $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,

alors f admet un $DL_{n+1}(a)$: $f(x) = f(a) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$

Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 11 : Applications linéaires

Tout le chapitre est au programme

Chapitre 12 : Probabilités

Tout le chapitre est au programme

1 Ensembles dénombrables

2 Expérience aléatoires, issues et événements

3 Espace probabilisé

4 Indépendance et probabilité conditionnelle

4.1 Probabilité conditionnelle

4.2 Notion d'indépendance

4.3 Formule des probabilités composées

4.4 Formule des probabilités totales

4.5 Formule de Baye

5 Suites d'événements

Théorème de continuité monotone.

Les variables aléatoires ne sont pas au programme

Questions de cours

Q1 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 1
Soit f une application linéaire de E vers F.

1. f est injective ssi $\ker(f) = \{0_E\}$.
2. f est surjective ssi $\operatorname{Im}(f) = F$.
3. f est bijective donc est un isomorphisme ssi $\ker(f) = \{0_E\}$ et $\operatorname{Im}(f) = F$.

Q2 : Énonce et démonstration de :

Propriété 2
Soit E et F deux ev de dimensions finies et égales. Alors les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est un isomorphisme de E sur F.
2. $\ker(f) = \{0_E\}$.
3. $\operatorname{Im}(f) = F$.

Q3 : Énoncé de la définition d'une probabilité

Définition 1
On appelle **probabilité** sur Ω toute application $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que :

- $P(\Omega) = 1$;
- pour tout couple (A, B) de parties **disjointes** de Ω, $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Q4 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 3
Soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ un événement.

Si $P(B) > 0$, alors l'application P_B définie par : $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\quad \boxed{P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}}$

est une probabilité sur (Ω, P), appelée **probabilité conditionnelle sachant** B.

Q5 : Énoncé des formules : probabilités composées, formules des probabilités totales et formules de Bayes

Propriété 4
Formule des probabilités composées :

Soit A, B deux événements . Alors :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B)P_B(A) = P(A)P_A(B)}$$

Plus généralement, si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille d'événements , alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3).....P_{A_1 \cap A_2 \cap ....\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Propriété 5
Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un **système complet d'événements** de Ω.

Alors pour tout événement $B \in \mathscr{P}(\Omega)$,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)$$

Dans le cas du système complet $\{A, \overline{A}\}$, on obtient

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$$

Propriété 6
Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(B) \neq 0$ et $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un **système complet d'événements** de Ω. Alors :

$$\forall k \in [|1, n|], \quad P_B(A_k) = \frac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)}$$

dans le cas du système complet $\{A, \overline{A}\}$, on obtient :

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)}$$