

Programme de Colle 24

Semaine 18 – du 28 au 30 avril 2025

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative)
ou une primitive usuelle **ou** un équivalent usuel en 0 ainsi que son écriture équivalente avec o **ou** un développement limité usuel en 0, sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de *l'ensemble* du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 5 : Limites et comparaison des fonctions (Tout le chapitre)

Chapitre 6 : Continuité (Tout le chapitre)

Chapitre 7 : Dérivabilité (Tout le chapitre)

Chapitre 8 : Développements limités

1. Définitions et premières propriétés
2. Obtention des développements limités usuels en 0
 - 2.1. La formule de Taylor-Young
 - 2.2. Primitivation et dérivation des développements limités
3. Opérations sur les développements limités
4. Applications
 - 4.1. Développements limités au voisinage d'un point autre que 0
 - 4.2. Calculs de limites et recherche d'équivalents
 - 4.3. Étude locale d'une fonction au voisinage d'un point
 - 4.4. Étude locale d'une fonction au voisinage de l'infini

Développements limités et équivalents usuels en 0

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur** !

Développements limités et équivalents usuels en 0

Développements limités

Équivalents

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{ch}(x) = \sum_{k=0}^p \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2p}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2p})$$

$$\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{sh}(x) = \sum_{k=0}^p \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2p+1}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2p+1})$$

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\operatorname{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^5)$$

$$\operatorname{th}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2p}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2p})$$

$$\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$$

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N}, \quad \sin(x) &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2p+1}) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2p+1}) \end{aligned}$$

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^5)$$

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1.$$

Si de plus $\alpha \neq 0$,

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o_{x \rightarrow 0}(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o_{x \rightarrow 0}(x^n) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$$

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{Arctan}(x) &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2p+1}) \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2p+1}) \end{aligned}$$

$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

Questions de cours :

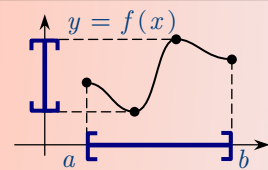
Q1. Énoncé et démonstration « Théorème des bornes atteintes »

**Théorème***Théorème des bornes atteintes*

- ✓ Toute fonction continue sur un segment, est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit :

- ✓ L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.



Q2. Énoncé et démonstration « Théorème de Rolle »

**Théorème***Théorème de Rolle*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.

Alors :

$$\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$$

Q3. Énoncé et démonstration « Inégalité des accroissements finis »

**Théorème***Inégalité des accroissements finis*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et si $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq k$.

Alors :

$$\forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Q4. Énoncé et démonstration « Théorème de la limite de la dérivée »

**Théorème***Théorème de la limite de la dérivée*

Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- (i) Si f est continue en a , dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et f' admet une limite finie ℓ en a ,

Alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$, donc f' est continue en a .

- (ii) Si f est continue en a , dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et f' admet une limite infinie ($\pm\infty$) en a ,

Alors f n'est pas dérivable en a , et le graphe de f possède une tangente verticale au point d'abscisse a .

Q5. Énoncé et démonstration « Formule de Taylor-Young »

**Théorème***Formule de Taylor-Young*

Soient I un intervalle, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

Alors, f admet un $DL_n(a)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \quad (\text{Formule de Taylor-Young})$$

Q6. Énoncé et démonstration « Primitivation des développements limités »

**Théorème***Primitivation des développements limités*

Soient I un intervalle, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

Si f' admet un $DL_n(a)$: $f'(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$, avec $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,

alors f admet un $DL_{n+1}(a)$: $f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o_{x \rightarrow a}((x-a)^{n+1})$

Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 11 : Applications linéaires

Tout le chapitre est au programme

Chapitre 12 : Probabilités

Tout le chapitre est au programme

Chapitre 13 : Matrices

1 Définitions

2 Espace vectoriel $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$

3 Produit matriciel

4 Matrices carrées inversibles

5 Calcul pratique de l'inverse d'une matrice carrée

Les deux méthodes vues en classe sont l'utilisation d'un système et la méthode de Gauss

6 Transposition

7 Trace d'une matrice carrée

Les matrices d'applications linéaires ne sont pas au programme cette semaine

Questions de cours page suivante.

Questions de cours

Q1 : Énonce et démonstration de :

Propriété 1

Soit E et F deux ev de dimensions finies et égales. Alors les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est un isomorphisme de E sur F .
2. $\ker(f) = \{0_E\}$.
3. $\text{Im}(f) = F$.

Q2 : Énoncé de la définition d'une probabilité

Définition 1

On appelle **probabilité** sur Ω toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ telle que :

- $P(\Omega) = 1$;
- pour tout couple (A, B) de parties **disjointes** de Ω , $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Q3 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 2

Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement.

Si $P(B) > 0$, alors l'application P_B définie par : $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P})$, appelée **probabilité conditionnelle sachant B** .

Q4 : Énoncé des formules : probabilités composées, formules des probabilités totales et formules de Bayes (voir programme de colle précédent)

Q5 : Énoncé de :

Caractérisation des matrices inversibles

Propriété 3

Caractérisation des matrices inversibles :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible ssi pour tout second membre $Y \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire : $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une et une seule solution.

En particulier, le système $AX = 0_n$ admet une unique solution.

Donc A est inversible ssi les vecteurs colonnes de A forment une famille libre dans $\mathbb{K}^n$.

Q6 : Énoncé de :

Définitions et propriétés de la trace et de la transposition.

Propriété 4

Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. Linéarité : $\text{Tr}(A + \lambda B) = \text{Tr}(A) + \lambda \text{Tr}(B)$.
2. $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$
3. $\text{Tr}({}^t A) = \text{Tr}(A)$

Propriété 5

Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. Linéarité : ${}^t(A + \lambda B) = {}^t A + \lambda {}^t B$
2. ${}^t({}^t A) = A$
3. ${}^t(BC) = {}^t C {}^t B$
4. $({}^t A)^{-1} = {}^t (A^{-1})$