

Programme de Colle 5 Semaine 45 – du 4 au 8 novembre 2024

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative) sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de *l'ensemble* du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 1 : Nombres réels (Tout le chapitre)

Chapitre 2 : Fonctions réelles

1. Vocabulaire des fonctions
 - 1.1. Définitions générales
 - 1.2. Ordre et fonctions
 - 1.3. Opérations sur les fonctions, composition
 - 1.4. Parité
 - 1.5. Fonctions périodiques
 - 1.6. Fonctions monotones, croissantes et décroissantes
 - 1.7. Théorème de continuité, de dérivabilité d'une fonction réciproque
2. Fonctions usuelles
 - 2.1. Fonction valeur absolue
 - 2.2. Fonctions puissances entières
 - 2.3. Logarithme népérien
 - 2.4. Exponentielle
 - 2.5. Fonctions puissances (quelconques)
 - 2.6. Croissances comparées
 - 2.7. Fonctions circulaires
 - 2.8. Fonctions circulaires inverses
 - 2.9. Fonctions hyperboliques

Formulaire de trigonométrie

Dérivées usuelles

Courbes représentatives des fonctions usuelles

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur** !

Questions de cours :

Q1. Énoncé et démonstration « *Plus grand élément et partie de \mathbb{N}* ».



Théorème *Plus grand élément et partie de \mathbb{N}*

Toute partie non vide **majorée** de \mathbb{N} possède un plus grand élément.

Q2. Énoncé et démonstration « *\mathbb{R} est archimédien* ».



Théorème *\mathbb{R} est archimédien*

L'ensemble \mathbb{R} est *archimédien*, i.e. : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \exists n \in \mathbb{N}, x < ny$.

Q3. Énoncé et démonstration « *Fonction bornée et valeur absolue* ».



Théorème *Fonction bornée et valeur absolue*

Soient E un ensemble inclus dans \mathbb{R} , $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on a équivalence entre :

- (i) f est bornée.
- (ii) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, |f(x)| \leq M$.
- (iii) $|f|$ est majorée.

Q4. Énoncé et démonstration « *Stricte monotonie et injectivité* ».



Théorème *Stricte monotonie et injectivité*

Soient E une partie de \mathbb{R} , $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est strictement monotone sur E , alors f est injective.

Q5. Énoncé « *Propriétés de la fonction logarithme népérien* » et démonstration du (iii).



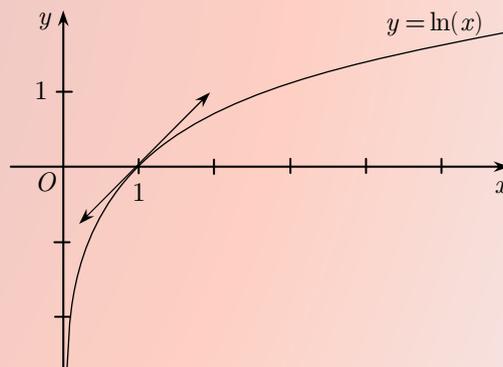
Théorème *Propriétés de la fonction logarithme népérien*

- (i) $\ln(1) = 0$
- (ii) La fonction \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$$

donc \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* et indéfiniment dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

- (iii) $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- (iv) $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b), \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- (v) $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) = n \ln(a)$.
 $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$
- (vi) $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty, \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.



Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 2 : Calculs algébriques

Tout le chapitre est au programme

Chapitre 3 : Nombres complexes

Fiche méthode 3 : exercices et leçon

- 1 Introduction
- 2 L'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes
- 3 Conjugué et opérations
- 4 Plan complexe
- 5 Module et argument
 - 5.1 Forme trigonométrique ou forme polaire
 - 5.2 Formules de trigonométrie
 - 5.3 Propriétés du module et de l'argument
- 6 Notation exponentielle

La résolution d'équations du second degré n'est pas au programme cette semaine.

Questions de cours

Q1 : Énoncé et démonstration de la formule $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$

Q2 : Énoncé et démonstration de la formule du binôme de Newton.

Q3 : Énoncé de toutes les formules de la propriété du paragraphe « Résultats classiques » du chapitre 2.

Q4 : Énoncé de « Propriétés du conjugué » et démonstration des points 4 et 6.

Propriété 1

$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \lambda \in \mathbb{R} :$

- | | |
|--|---|
| 1. $\overline{\overline{z}} = z$ | 5. $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$ |
| 2. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$ | 6. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ |
| 3. $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$ | 7. $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}, \quad z' \neq 0$ |
| 4. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ | 8. $\overline{z^n} = (\overline{z})^n, \quad z \neq 0$ |

Q5 : Énoncé de « Propriétés du module et de l'argument » et démonstration du point 3.

Propriété 2

Soit $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$.

- | | |
|---|--|
| 1. $ z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$. | 5. $\left \frac{z}{z'}\right = \frac{ z }{ z' }, \quad z' \neq 0$ |
| 2. $ z \geq 0$ | $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' [2\pi].$ |
| 3. $ zz' = z \times z' $. | 6. pour tout $n \in \mathbb{Z}, z^n = z ^n$ |
| $\arg(zz') = \arg z + \arg z' [2\pi].$ | $\arg z^n = n \arg z [2\pi].$ |
| 4. $\left \frac{1}{z}\right = \frac{1}{ z }, \quad z \neq 0$ | 7. $ z = -z $ et $\arg(-z) = \arg z + \pi [2\pi]$ |
| $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z [2\pi].$ | 8. $ \overline{z} = z $ et $\arg \overline{z} = -\arg z [2\pi].$ |

Q6 : Définition de l'ensemble \mathbb{U} :

Définition 1

On note \mathbb{U} l'ensemble des nombres complexes de module 1, $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$.

Pour tout $z \in \mathbb{U}$, l'image de z appartient au cercle de centre O et de rayon 1, que l'on appelle le **cercle trigonométrique**.