Année 2024-2025
Promo 32 – 1$^{\text{ère}}$ Année

Programme de Colle 6
Semaine 46 – du 11 au 15 novembre 2024

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative) sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de ***l'ensemble*** du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 1 : Nombres réels (Tout le chapitre)

Chapitre 2 : Fonctions réelles

1. Vocabulaire des fonctions
    - 1.1. Définitions générales
    - 1.2. Ordre et fonctions
    - 1.3. Opérations sur les fonctions, composition
    - 1.4. Parité
    - 1.5. Fonctions périodiques
    - 1.6. Fonctions monotones, croissantes et décroissantes
    - 1.7. Théorème de continuité, de dérivabilité d'une fonction réciproque
2. Fonctions usuelles
    - 2.1. Fonction valeur absolue
    - 2.2. Fonctions puissances entières
    - 2.3. Logarithme népérien
    - 2.4. Exponentielle
    - 2.5. Fonctions puissances (quelconques)
    - 2.6. Croissances comparées
    - 2.7. Fonctions circulaires
    - 2.8. Fonctions circulaires inverses
    - 2.9. Fonctions hyperboliques

Formulaire de trigonométrie
Dérivées usuelles
Courbes représentatives des fonctions usuelles

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur !**

Questions de cours :

Q1. Énoncé et démonstration « *Plus grand élément et partie de $\mathbb{N}$* ».

Théorème *Plus grand élément et partie de $\mathbb{N}$*

Toute partie non vide **majorée** de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Q2. Énoncé et démonstration « $\mathbb{R}$ *est archimédien* ».

Théorème $\mathbb{R}$ *est archimédien*

L'ensemble $\mathbb{R}$ est *archimédien*, *i.e.* : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n \in \mathbb{N},\ x < ny$.

Q3. Énoncé et démonstration « *Fonction bornée et valeur absolue* ».

Théorème *Fonction bornée et valeur absolue*

Soient E un ensemble inclus dans $\mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on a équivalence entre :

- **(i)** f est bornée.
- **(ii)** $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ |f(x)| \leqslant M$.
- **(iii)** $|f|$ est majorée.

Q4. Énoncé et démonstration « *Stricte monotonie et injectivité* ».

Théorème *Stricte monotonie et injectivité*

Soient E une partie de $\mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est strictement monotone sur E, alors f est injective.

Q5. Énoncé « *Propriétés de la fonction logarithme népérien* » et démonstration du **(iii)**.

Théorème *Propriétés de la fonction logarithme népérien*

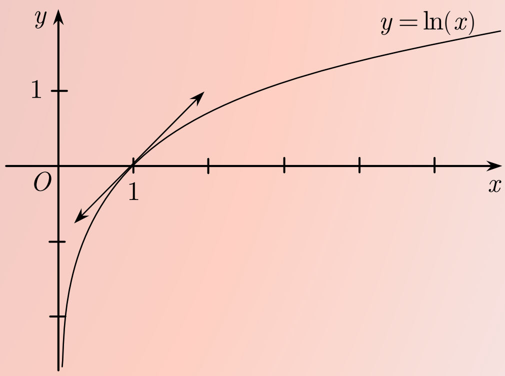
- **(i)** $\ln(1) = 0$
- **(ii)** La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$$

donc ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **(iii)** $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- **(iv)** $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b), \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- **(v)** $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(a^n) = n\ln(a)$.

  $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$
- **(vi)** $\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty, \quad \ln(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.



Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 2 : Calculs algébriques

Tout le chapitre est au programme

Chapitre 3 : Nombres complexes

Fiche méthode 3 : exercices et leçon

1 Introduction

2 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

3 Conjugué et opérations

4 Plan complexe

5 Module et argument

5.1 Forme trigonométrique ou forme polaire

5.2 Formules de trigonométrie

5.3 Propriétés du module et de l'argument

6 Notation exponentielle

La résolution d'équations du second degré n'est pas au programme cette semaine.

Questions de cours

Q1 : Énoncé et démonstration de la formule $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$

Q2 : Énoncé et démonstration de la formule du binôme de Newton.

Q3 : Énoncé de toutes les formules de la propriété du paragraphe « Résultats classiques » du chapitre 2.
Q4 : Énoncé de « Propriétés du conjugué » et démonstration des points 4 et 6.

Propriété 1
$\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \overline{z} = z$
3. $z \in i\mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \overline{z} = -z$
4. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z}'$
5. $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$
6. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z}'$
7. $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z}'}$, $\quad z' \neq 0$
8. $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$, $\quad z \neq 0$

Q5 : Énoncé de « Propriétés du module et de l'argument » et démonstration du point 3.

Propriété 2
Soit $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$.

1. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$.
2. $|z| \geqslant 0$
3. $|zz'| = |z| \times |z'|$.
   $\arg(zz') = \arg z + \arg z'[2\pi]$.
4. $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$. $z \neq 0$
   $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg z[2\pi]$.
5. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$. $z' \neq 0$
   $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'[2\pi]$.
6. pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|z^n| = |z|^n$
   $\arg z^n = n \arg z[2\pi]$.
7. $|z| = |-z|$ et $\arg(-z) = \arg z + \pi[2\pi]$
8. $|\bar{z}| = |z|$ et $\arg \bar{z} = -\arg z[2\pi]$.

Q6 : Définition de l'ensemble $\mathbb{U}$:

Définition 1
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, $\boxed{\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}}$.

Pour tout $z \in \mathbb{U}$, l'image de z appartient au cercle de centre O et de rayon 1, que l'on appelle le **cercle trigonométrique**.