

Programme de Colle 9

Semaine 49 – du 2 au 6 décembre 2024

Toutes les colles commenceront par :

- ✓ une formule de trigonométrie (sans démonstration) **ou** une description d'une fonction usuelle (Domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, la dérivée et la courbe représentative) **ou** une primitive usuelle, sur 2 points.
- ✓ une question de cours choisie parmi les questions de cours en analyse et en algèbre. Cette question de cours sera notée sur 4 points.

La connaissance de **l'ensemble** du cours (définitions, théorèmes, formules, méthodes ...) étant essentielle, toute méconnaissance pendant la colle sera sanctionnée par une note finale en dessous de 10.

Analyse

Chapitre 2 : Fonctions réelles (Tout le chapitre)

Chapitre 3 : Équations différentielles

1. Primitives et intégrales

Intégration par parties (pas de changement de variables qui sera vu ultérieurement)

2. Fonctions à valeurs complexes

2.1. Continuité, dérivabilité

2.2. Primitives

3. Équations différentielles linéaires du premier ordre

3.1. Équations homogènes

3.2. Équations avec second membre

4. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

4.1. Équations homogènes

4.2. Équations avec second membre

Second membre uniquement de la forme $P(x)e^{kx}$, $P(x)\cos(kx)$, $P(x)\sin(kx)$,

$P(x)\operatorname{sh}(kx)$, $P(x)\operatorname{ch}(kx)$ où P est un polynôme.

Primitives usuelles

Tous les énoncés des définitions et des théorèmes doivent être connus **par cœur** !

Questions de cours :

Q1. Énoncé et démonstration « *Stricte monotonie et injectivité* ».

**Théorème***Stricte monotonie et injectivité*

Soient E une partie de $\mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est strictement monotone sur E , alors f est injective.

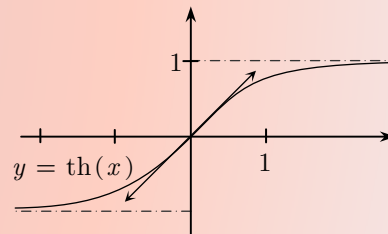
Q2. Énoncé « *Dérivée et représentation graphique de la fonction th* » et démonstration de la dérivée et des asymptotes.

**Théorème***Dérivée et représentation graphique de la fonction th*

- La fonction tangente hyperbolique est définie et dérivable (donc continue) et impaire sur $\mathbb{R}$. On a, pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}.$$

- La droite d'équation $y = 1$ (resp. $y = -1$) est asymptote à la courbe représentative de la fonction tangente hyperbolique en $+\infty$ (resp. $-\infty$).



Q3. Énoncé et démonstration « *La formule d'intégration par parties* ».

**Théorème***La formule d'intégration par parties*

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs dérivées u' et v' sont continues sur I , alors, pour tout $(a, b) \in I^2$:

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Q4. Énoncé et démonstration « *Dérivée des fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$* ».

**Théorème***Dérivée des fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$*

Soient I un intervalle, $u : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable, alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

Q5. Énoncé et démonstration « *Problème de Cauchy pour $y' + a(x)y = b(x)$* ».

**Théorème***Problème de Cauchy pour $y' + a(x)y = b(x)$*

Soient I un intervalle, $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, A une primitive de a sur I , $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (y(x_0) = y_0 \text{ est appelée condition initiale})$$

Algèbre

À la page suivante :

Algèbre

Chapitre 4 : Systèmes linéaires d'équations

Savoir résoudre un système avec la méthode du pivot de Gauss.

Chapitre 5 : Applications et relations binaires

1 Définitions

2 Image et image réciproque d'une partie

3 Injections, surjections, bijections

Les relations binaires ne sont pas au programme cette semaine.

Questions de cours

Q1 : Soit f une applications de E dans F .

Définition de l'**image** $f(A)$ **d'une partie** A de E par f .

Définition de l'ensemble $\text{Im} f$.

Définition de l'**image réciproque** $f^{-1}(A)$ **d'une partie** A de F par f .

Q2 : Définition d'une application **injective**,
définition d'une application **surjective**
et définition d'une application **bijective**.

Q3 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 1

Soit f une applications de E dans F et g une application de F dans G .

Si f et g sont deux fonctions bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Q4 : Énoncé et démonstration de :

Propriété 2

Soit $f : E \mapsto F$. Si E et F sont des ensembles **finis de même cardinal** alors :

f est bijective $\Leftrightarrow f$ est injective $\Leftrightarrow f$ est surjective.